

**INSTITUTIONES
ARITHMETICAE
PAULINI A S.
JOSEPHO LUCENSIS
... CUM PRAXEON...**

Domenico Chelucci





H. B. 30.

14-25. D. 12

10

11

12

13

J. B. Jno
INSTITUTIONES
ARITHMETICÆ

PAULINI A S. JOSEPHO

Collegii LUCENSIS *Dno Cno*

Cler. Reg. Schol. Pfar. & in Archigymn.
Romano Eloquentiæ Professoris

S. Maria CUM *in Monticellij*

PRAEÆON CHRONOLOGICARUM

APPENDICE.

Editio Prima Neapolitana Romana 1749.
Accuratio & emendatio.



NEAPOLI, MDCCLV.

Ex Typographia BENEDICTI GESSARI.

SUPERIORUM PERMISSU, ET PRIVILEGIO



THE
LIBRARY
OF THE
MUSEUM OF
COMPARATIVE ZOOLOGY
AND ANATOMY
HARVARD UNIVERSITY
CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS

RECEIVED
MAY 10 1950
MUSEUM OF COMPARATIVE ZOOLOGY
HARVARD UNIVERSITY
CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS

A D M. R E V. P A T R I
F. ALBERTO CAPOBIANCO
ORDINIS PRÆDICATORUM

*Sac. Theol. Magistro, & Eminentiss. Card. SERSALII
Archiepiscopi Neapolitani Theologo.*



Um diu, multumque sit, quod
mecum ipse meditabar, qui
tandem studium erga Te meum
publico aliquo argumento te-
stari possem, qui votis satisfac-
cerem; commoda sese mihi de-
dit occasio Institutiones hæcæ Arithmeticas
publici juris facere paranti. Et quidem uno,
eodemque tempore posse mihi videor, &
Tibi pluribus nominibus obligatam fidem
liberare, & opellæ huic pretium, & decus
ex tuo in fronte ejusdem inscripto nomine
arcessere. Quam sanè optionem ab optimis
rerum aestimatoribus, modo eisdem, qualis,
quantusve Tu sis in re Philosophica non la-
teat, probatum iri meus mihi animus augu-
ratur. Cuinam enim commodius poterat
hujusmodi argumenti tractatio nuncupari,
quam Tibi, qui improbo, ut ita dicam, la-
bore quicquid est sive veterum, sive recen-
tium Philosophorum nocturna, diurnaque

verfasti manu; quique eam Tibi in hisce studiis non mediocrem laudem adeptus es, ut longe, lateque extra angustos Claustrorum [ubi inter primarios tui Ordinis Sacræ Theologiæ Magistros non imum subsellium obtines] fines, ut solet regius amnis, Tui nominis fama erumpente, Te certatim accirent universi, ut apud se philosophantem, ut ita dicam, audirent. Testis Bituntinæ Ecclesiæ Præful ille vigilantissimus D. Joannes Barba, qui Tibi sui Seminarj alumnos severioribus Philosophiæ disciplinis concedit informandos. Testis locupletissimus & Archiepiscopus noster Cardinalis Serfalius acerrimi judicj Vir, qui Tua unius opera utens in Brundusino & Tarentino Seminario Triptolemi instar Philosophiam spargere studuit, & promovere; quique ad regendum hujusce Metropolitanæ Ecclesiæ clavum admotus haud sivit Te a se divelli. Hic facile de Te cætera persequi supersedeo, ne modestiam Tuam diutius fatigem; interim hoc quaecumque est ab animo certe Tibi deditissimo profectum officium, ut æqui bonique accipias, rogo.

Humillimus, & Additiss. Servus
Benedictus Gessari.

AD LECTOREM. ^v



Auci sunt, qui de Arithmetica recte judicent. Ea plerisque vilescit, quod negotiatorum, aut eorum, qui accepti expensique tabulas conficiunt, artem esse putent. At longe aliter de illa viri sapientes judicaverunt. Plato quidem in *Epinomide* affirmat, sine Arithmetica neque ullam scientiam, neque ipsam hominum societatem posse consistere. Aristoteles autem existimabat, tam proprium esse hominis numerare, quam ratiocinari. Quid vero D. Augustinus, qui frequentissime suis in libris, præsertim vero de *Doctrina Christiana*, præclare de Arithmetica loquitur, multisque exemplis ostendit, ob numerorum inscitiam, plurima in sacris literis ignorari? In eadem profus sententia fuerunt D. Hieronymus, ut ex *lib. 2.* contra Jovinianum, aliisque ex locis palam est; tum D. Gregorius Nazianzenus, qui Divum Basilium præceptorem suum summis laudibus celebrat, quod is numerorum scientia ad sacræ Scripturæ intelligentiam, aliasque disciplinas sibi viam munivisset. Illud certe negari non potest, ab iis, qui Arithmeticæ studia contemnunt, Geometriæ quoque, ac veræ Physicæ studia, hoc est disciplinarum omnium succum & sanguinem, contemni omnino oportere: cum fieri non possit, ut hæc, quæ
mi-

vj

mirabili quodam ordine ac numerorum proportione inter se cohærent, sine scientia numerorum intelligantur. Quis enim sine calculis comprehendat motus quantitatem ac leges, quadrata temporum, triplicatas corporum similibus rationes, resistendi vires, sonorum velocitates, liquidorum æquilibria, ac sexcenta alia, quibus non intellectis, naturalem omnem scientiam eum latere necesse est? Itaque non immerito Plato in *lib. 7. de Repub.* Arithmeticam vocat vestibulum scientiarum, quod scilicet numerorum tractatione speculationibus difficilioribus animus assuefcit, & ad reliquos scientiæ fatus excipiendos mirum in modum præparatur. Imo ex ipsa numerari vi faustum ad ceteras disciplinas progressum auguratur. *Homines*, inquit, *natura Arithmetici ad omnes doctrinas acuti videntur.* Hinc est, quod multi in omni memoria viri doctissimi in ordinandis illustrandisque Arithmeticiæ elementis defudarunt, quod eorum utilitatem summamque necessitatem probe nossent. Ex præclaris eorum inventis ego triginta & amplius ab hinc annis ea decerpsi in usum studiosæ Juventutis Collegii Nazareni, quæ magis ad Juvenum ingenium apta, & ad Mathefeos studia necessaria esse judicavi. Semper enim illis viginti & uno annis, quibus nobiles ejusdem Collegii adolescentes in Mathematicis disciplinis instituti, Arithmeticiæ studium præmissi, cujus ope tum II., tum V. & VI. Elementorum Eûclidis propositiones facile ab illis percipi experientia comperi, contra vero Arithmetica destitutos in ipsis diu multoque labore versari.

Cum

Cum autem decursu temporis in ea scripta per manus tradita multa menda, ut fieri solet, irrepissent, multoque labore ac tempore in illis transcribendis opus esset, res non inutilis visa est, illa typis emittere; eaque occasione adjecta est doctrina de natura atque usu Logarithmorum; tum etiam nonnulla alia, quæ ad quæstiones aliquot Arithmeticæ practicæ pertinent, quæ sane in vita civili haud semel occurrunt. Ad praxes autem Arithmeticas, quæ præcepti brevitate, & exemplorum copia satis claræ esse videntur, accedunt quoque demonstrationes, quales in hujus scientiæ tyrones conveniunt, quibus nimirum Euclides adhuc ignotus: cujus nihilominus unam, vel alteram propositionem citare, aut supponere, opportunum visum est, Profecto meras praxes afferre, rem valde tritam & vulgarem putavi: demonstrationes autem adhibere ex Euclidis elementis VII., VIII., & IX., vel etiam ab Analyseos speciosæ penu depromptas, quod alii fecerunt, juventuti nostræ rem immaturam. An vero in medio constiterim, sapientum esto judicium.

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE

Cler. Reg. Pauperum Marris Dei Scholar. Piar.

PRÆPOSITUS GENERALIS.

CUM librum, cui titulus *Institutiones Arithmeticae &c.* a P. Paulino a S. Joseph Assistente Generali Scholarum Piarum duo ex nostris, quibus commissum fuit, recognoverint, atque approbaverint, ut typis mandetur, si iis, ad quos spectat, ita videbitur, facultatem in Domino concedimus. Romæ in Ædibus nostris Scholarum Piarum apud Sanctum Pantaleonem, die 29. Aprilis an. 1743.

JOSEPH AB ANGELO CUSTODE
PRÆP. GENERALIS.*Laurentius a S. Hyacintho Secr.*

I N D E X

CAPITUM, ET PROPOSITIONUM.

Definitiones. Pag. I

C A P U T I.

De Calculo Integrorum.

Prop. I.	D <i>Ati numeri valorem exprimere.</i>	3
Prop. II.	<i>De additione Integrorum.</i>	6
Prop. III.	<i>Additionem examinare.</i>	9
Prop. IV.	<i>De subtractione Integrorum.</i>	11
Prop. V.	<i>De multiplicatione Integrorum.</i>	14
Prop. VI.	<i>De divisione Integrorum.</i>	21
Prop. VII.	<i>De divisione Integrorum per numeros divisoris multiplices.</i>	30

C A P U T II.

De Calculo Denominatorum.

Prop. I.	<i>De additione numerorum denominatorum.</i>	34
Prop. II.	<i>De subtractione numerorum denominatorum.</i>	38
Prop. III.	<i>De multiplicatione numerorum denominatorum.</i>	40
Prop. IV.	<i>De divisione numerorum denominatorum.</i>	41

b

CA-

C A P U T III.

De Calculo Fractorum.

Definitiones.		43
Axioma.		45
Prop. I.	<i>Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.</i>	46
Prop. II.	<i>Fractioes ad minimos terminos reducere.</i>	48
Prop. III.	<i>Fractioes ad idem nomen reducere.</i>	49
Prop. IV.	<i>Fractioes ad aliam dati nominis, & ejusdem valoris revocare.</i>	51
Prop. V.	<i>Fractioes ad integra revocare.</i>	53
Prop. VI.	<i>Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.</i>	54
Prop. VII.	<i>Fractioem fractionis ad simplicem fractionem reducere.</i>	55
Prop. VIII.	<i>Fractioes addere.</i>	56
Prop. IX.	<i>Fractioes subtrahere.</i>	57
Prop. X.	<i>Fractioes multiplicare.</i>	57
Prop. XI.	<i>Fractioes dividere.</i>	59

C A P U T IV.

De Fractionibus Decimalibus.

Definitiones.		62
Prop. I.	<i>Decimales addere, & subtrahere.</i>	65
Prop. II.	<i>Decimales multiplicare.</i>	67
Prop. III.	<i>Decimales dividere.</i>	68
Prop. IV.	<i>Integrum, vel fractum in partes decimales reducere.</i>	79
	Prop	

Prop.V.	<i>Decimales particulas ad fractionem datae denominationis reducere.</i>	xj 71
---------	--	----------

CAPUT V.

De extractione Radicum.

Definitio.		74
Prop.I.	<i>Ex dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.</i>	75
Prop.II.	<i>Radice[m] quadratam per approximationem inquirere.</i>	80
Prop.III.	<i>Ex dato numero radicem cubicam extrahere.</i>	82
Prop.IV.	<i>Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.</i>	86
Prop.V.	<i>Questiones aliquot resolvuntur per radicis quadratae, vel cubicae extractionem.</i>	88

CAPUT VI.

De Regulis Arithmeti[c]is.

Definitiones.		91
Lemmata.		92
Prop.I.	<i>De regula Proportionum.</i>	93
Prop.II.	<i>De regula Proportionum composita.</i>	96
Prop.III.	<i>De regula Proportionum inversa.</i>	98
Prop.IV.	<i>Explicantur nonnulla pro regulis Proportionum compendia.</i>	101
Prop.V.	<i>De regula Societatis.</i>	103
Prop.VI.	<i>De regula Allegationis.</i>	106

b 2

Prop.

(xij)

Prop.VII.	<i>De regula simplicis Positionis, seu falsi.</i>	110
Prop.VIII.	<i>De regula duplicis Positionis.</i>	112
Prop.IX.	<i>Artificis furtum in corona Hieronis regis detegere.</i>	118
Prop.X.	<i>Datis duobus numeris, tertium proportionalem invenire.</i>	120
Prop.XI.	<i>Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.</i>	122
Prop.XII.	<i>Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.</i>	122
Prop.XIII.	<i>Questiones aliquot practica expediuntur.</i>	123

C A P U T VII.

De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

Lemmata.		129
Prop.I.	<i>Datis minimo ac maximo progressionis Arithmeticae terminis, & terminorum numero, invenire summam.</i>	131
Prop.II.	<i>Datis terminis maximo & minimo, necnon & numero terminorum, differentiam invenire.</i>	132
Prop.III.	<i>Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire maximum.</i>	133
Prop.IV.	<i>Minimo & maximo, necnon & differentia datis, numerum terminorum invenire.</i>	134
Prop.V.	<i>De numeris Polygonis.</i>	135
Prop.		De

De Progressionibus Geometricis.

- Lemmata. 137. & 138
- Prop. VI. *Datis minimo & maximo progressionis Geometricæ terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire.* 139
- Prop. VII. *Datis aliquot progressionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.* 142
- Prop. VIII. *Afferuntur nonnullæ Progressionis Geometricæ quæstiones.* 143
- Prop. IX. *Ex dato rerum numero combinationes omnes invenire.* 145
- Prop. X. *Ex dato rerum numero permutationes omnes possibiles invenire.* 147
- Prop. XI. *Proponuntur aliqua permutationum problemata.* 149
- Prop. XII. *Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus, tres numeros Harmonice proportionales invenire.* 150
- Prop. XIII. *Datis duobus numeris tertium Harmonice proportionalem invenire.* 151
- Prop. XIV. *Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.* 151

CAPUT VIII.

De Logarithmis, eorumque natura,

atque usu.

- Lemmata. 154
- Prop. I. *De natura Log-morum, eorumque inventione.* 154
- Prop.

- Prop. II. Si Logarithmus unitatis sit 0, erit Log-
mus facti aequalis aggregato ex Log-
mi factorum. 158
- Prop. III. Si Log-mus unitatis est 0, differentia Log-
morum duorum numerorum aequatur
Log-mo quoti eorundem numerorum. 158
- Prop. IV. Numeri cujuscunque Log-mum inveni-
re. 158
- Prop. V. Multiplicare duos numeros, qui minores
sint quam 10000. 162
- Prop. VI. Numerum integrum minorem, quam
10000 per alium dividere. 163
- Prop. VII. Datis tribus numeris, quartum propor-
tionalem invenire. 164
- Prop. VIII. Invenire Log-mum pro numeris majori-
bus, quam in canone continentur, sed
numerum 10,000,000 non excedenti-
bus. 164
- Prop. IX. Data fractionis Log-mum invenire. 167
- Prop. X. Dato Log-mo, qui in tabulis accurate
non existit, invenire numerum ei re-
spondentem. 169
- Prop. XI. Dato Log-mo defectivo, numerum ei re-
spondentem invenire. 71
- Prop. XII. Dato Log-mo excedente Log-mum 4.
000000, numerum ei congruum in-
venire. 172
- Prop. XIII. Dati cujuscunque sinus Log-mum inveni-
re. 173
- Prop. XIV. Invenire Logarithmum Tangentium,
Secantium dati arcus. 175
- Probl.

Probl.I.	<i>Dati numeri quadratum, vel cubum per Logarithmos invenire.</i>	179
Probl.II.	<i>Inter duos numeros datos invenire quocunque medios proportionales.</i>	180
Probl.III.	<i>Quaestiones aliquot Arithmeticae per Logarithmos expediuntur.</i>	182
Probl.IV.	<i>Data tormenti bellici elevatione, distantiam istius invenire, & e converso.</i>	187
Probl.V.	<i>Altitudinem Poli tempore aequinoctiorum invenire.</i>	189
Probl.VI.	<i>In linea meridiana Zodiaci signa describere.</i>	190

A P P E N D I X

Praxewn Chronologicarum.

Definitiones.		193
Prax.I.	<i>An datus annus sit Biffextili, vel quotus sit a Biffextili, invenire.</i>	196
Prax.II.	<i>Cyclum Solarem anni dati invenire.</i>	197
Prax.III.	<i>Aureum numerum dati anni invenire.</i>	197
Prax.IV.	<i>In quam hebdomadae feriam incidat primus anni dati dies, invenire.</i>	198
Prax.V.	<i>Literam Dominicalem dati anni invenire.</i>	199
Prax.VI.	<i>Dati anni Epactam invenire.</i>	200
Prax.VII.	<i>Mense ac die datis, aetatem Luna invenire.</i>	200
Prax.VIII.	<i>Datis mense & anni Epacta, Novilunii diem invenire.</i>	201.
	Prax	

- Prax. IX. Dato *Ære Christianæ* anno, *Indictionem* invenire. 202
- Prax. X. Dato *Ære Christianæ* anno, quotus in *Periodo Juliana* ille sit, invenire. 202
- Prax. XI. Dato anno ante *Christi Æram*, quotus in *Periodo Juliana* ille sit, invenire. 203
- Prax. XII. Datis *Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis*, invenire annum *Periodi Juliana*, in quem conveniunt. 204
- Prax. XIII. Dato quolibet *Periidi Juliana* anno, *Olympiadum* annos invenire. 205
- Prax. XIV. Dato anno *Olympiaco*, quotus ille in *Periodo Juliana* sit, invenire. 207
- Prax. XV. Dato anno *Periodi Juliana*, annum *U.C.* ei congruentem invenire. 208
- Prax. XVI. Dato *U. C.* anno, *Periodi Juliana*, *Olympiadum*, & *Ære Christianæ* annos ei congruentes invenire. 209
- Prax. XVII. Dato quolibet *Per. Jul.* anno, initium anni *Ægyptiaci*, seu *neomeniam Thoth*, invenire. 211
- Prax. XVIII. Dato quolibet *Per. Jul.* anno, quotus ille in *Æra Nabonassari* sit, invenire. 213
- Prax. XIX. *Nabonassari* annos in *Per. Jul.* annos convertere. 215
- Prax. XX. In anno *Nabonassari* feriam invenire. 216

DEFINITIONES
INSTITUTIONES
ARITHMETICÆ

DEFINITIONES.



I. ARITHMETICA est scientia numerorum, cujus partes sunt quatuor: *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, & *Divisio*.

II. *Unitas* est denominatio, per quam aliqua res dicitur una.

III. *Numerus* est unitatum multitudo; proinde unitas non est numerus, sed numeri principium, sicuti punctum est principium lineæ.

IV. *Numeri simplices* sunt unitates infra decadem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. His additur cyphra 0, quæ per se nihil significat, sed numeris addita valorem auget decuplum, ut 10, 20, 30 &c.

V. *Numeri compositi* sunt numeri majores denario, incluso ipso denario, scilicet 10, 11, 12, 13, 14 &c.

VI. *Numerus numeri multiplex* dicitur, cum minor metitur majorem; hoc est cum minor aliquoties sumptus majori æqualis fit; seu cum major minorem aliquoties præcise continet. Sic 12 dicitur multiplex numeri 2, quia 2 sexies sum-

DEFINITIONES.

ptus æqualis fit ipsi 12; seu quia 12 sexies præcise continet 2.

VII. *Pars aliquota* numeri est, quæ numerum metitur, *pars aliquanta*, quæ non metitur. Sic 2, 3, 4 dicuntur pars aliquota numeri 12; at verò 5 pars aliquanta ipsius, quia aliquoties sumpta vel ipsum excedit, vel ab eo deficit.

VIII. *Numeri inter se primi sunt*, quos nulla communis mensura, præter unitatem, metitur; ut 5 & 9, 7 & 12, 10 & 13, & alii infiniti.

IX. *Proportio numerorum* est habitudo, seu ratio quædam unius numeri ad alterum, secundum quod unus alterius est multiplex, vel pars, seu partes, sic 4 ad 2 dicitur habere rationem dupli; 9 ad 3 rationem tripli. Contra vero 2 ad 4 rationem partis, seu semissis, 3 ad 9 rationem tertiæ partis &c.

X. *Numeri homogenei* sunt illi, quorum unitates eandem rem significant.

XI. *Numeri heterogenei*, seu *denominati* sunt, qui variis nominibus denominantur, hoc est res diversas significant, ut dies, horas, minuta.

XII. *Numeri alii sunt integri*, alii *fracti*, qui nempe continent aliquot partes alterius numeri, seu unitatis, de quibus in Cap. III.

Schol. *Has notas Arithmeticas, antiquis proorsus incognitas, in Hispaniam Mauri deportarunt; inde in Galliam, aliasque Europæ gentes induxit seculo x. Gerbertus Monachus Auréliacensis, vir doctus, qui postea fuit Pontifex Silvestri II. nomine.*

C A P U T I.

De Calculo Integrorum.

P R O P O S I T I O I.

Dati numeri valorem exprimere.

I. **S**It exprimendus numerus datus *A*. Dividatur in periodos, secernendo virgula ternas quascunque figuras, incipiendo a dextera; divisus erit numerus *A* in tres periodos, seu centurias. Harum quælibet continet unitates, decades, & centenas: sed prima dextrorsum continet unitates, decades, & centenas simpliciter; secunda vero continet unitates, decades, & centenas millium; tertia demum unitates, decades, & centenas millionum.

A 394, 875, 462.

Exprimitur incipiendo sinistrorsum, & progrediendo versus dexteram sic: tercenti nonaginta quatuor milliones, octingenta septuaginta quinque milia, quadringenta sexaginta duo. Similiter numerus *B* divisus, ut superius dictum est, dicitur centum viginti quatuor milliones, & duo milia

B 124, 002, 000.

Demum numerus *C* exprimitur milliones 100,

C 100, 000, 000.

II. Pro numeris proximioribus exprimendis ita procedes. 1. Datus numerus eodem modo per virgulas distribuatur in membra, ut superius factum est. 2. Super notam primam dextrorsum ponatur una cyphra 0, intermissisque quinque figuris, supra notam septimo loco positam ponatur unitas 1. Item post quinque iterum notas scribatur 2, atque ita deinceps, relictis semper quinque notis, scribatur 3, 4, 5 &c. Quodlibet nimirum continet sex notas, (præter primum ad sinistram, quod aliquando continere potest 2, 3, 4, aut 5 notas). Exprimendæ sunt igitur simul sex illæ notæ; prolataque integra periodo, toties repetenda est vox hæc *millio*, quot sunt unitates, quæ continentur supra primam notam talis periodi. Virgulæ autem appositæ *millia* significant; ut exemplis sequentibus *D*, & *E* facile intelligitur.

$D \quad 52,329,189,602,800$

Quinquaginta duo milliones, millionum; tercensum viginti novem millia, centum octoginta novem milliones, sexcenta duo millia, octingenta,

$E \quad 45,928,634,426,359,872,385,173$

Quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo milliones millionum, sexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti sex milliones millionum, tercenta quinquaginta millia, octingenti septuaginta duo milliones, trecenta octo-

ginta quinque millia ac centum septuaginta tres.

Schol. I. Si cui molestum sit iterare roties vocem illam millionum, utatur hoc compendio: Ubi pronuncianda est vox millionum bis, dicat bilionum: ubi ter, dicat trilionum: ubi quater, quadrilionum &c. adeoque superius exemplum. efferripotest sic quadraginta quinque millia, nongenti viginti octo triliones, sexcenta triginta quatuor millia, quadringenti viginti sex biliones, trecenta quinquaginta millia &c.

Schol. II. Praeter valorem simplicem, quem singulae notae Arithmeticae habent proprias, alium insuper habent ratione loci, quem occupant: qui valent procedit in proportione subdecupla. Itaque nota primo loci, quae dextris incipiendo, posita significat unitates, secundo loco posita significat decedentes, quae unitates habet, tertio loco tota centenas, quarta loco millia, quinto loco decem millia, sexto loco centena millia &c. Idem notae bene intelligantur necesse est. Ecco exemplum.

2	3	4	6	5	9	2	duo.
1	1	1	1	1	1	1	nonaginta
0	0	0	0	0	0	0	quingenta
0	0	0	0	0	0	0	sex millia.
0	0	0	0	0	0	0	quadraginta millia.
0	0	0	0	0	0	0	trecenta millia.
0	0	0	0	0	0	0	decies centena millia,
0	0	0	0	0	0	0	seu millio.
<hr/>							
2	3	4	6	5	9	2	

DE CALCULO INTEGRORUM
PROPOSITIO II.

De Additione Integrorum.

I. **A**dditio est plurimorum numerorum in unam summam collectio. Numeri addendi vocantur *dati*; numerus, qui ex additione conflatur, dicitur *summa*, seu *aggregatum*. Additio procedit a dextra in sinistram. En praxis pro homogeneis.

1. Scribantur numeri ordinatim ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis invicem sibi respondeant.

2. Ducta linea, numerus sub eadem columna positos in unum collige; & si novem non excedant, subscribe quotquot sunt.

3. Si numerus collectus excedit novem, ita ut unam, vel plures decades contineat, subscribe id, quod remanet supra decades, & adde sequentis columnæ numeris tot unitates, quot fuerunt decades.

Sit exemplum, quæritur quot anni clapsi sint ab orbe condito usque ad annum 1742. completum. Ex Petavii computo tom. 2. lib. 13. de Doctrina Temporum numerantur,

	D	C	B	A
Ab Anno condito	0	0	0	0
Ab Anno ad finem Diluvii anni	6	5	6	
A fine Diluvii ad Christum	2	3	2	7
A Christo ad annum 1742	1	7	4	2
	1	7	4	2
	5	7	2	5

Summa 5725

Nam

Nam primo unitates 2, 7, 6 in columna *A* faciunt 15, quæ continent decadem 1, & remanet 5. Scribo itaque 5 infra lineam, & reservo 1 pro sequenti columna *B*, nempe unam decadem.

Similiter decades 4, 2, 5 in columna *B* faciunt 11. addita priori unitate, sunt 12. Scribo 2 infra lineam, & retineo unitatem, quæ centenarium dicit, addendam numeris columnæ *C*.

Centena 7, 3, 6 columnæ *C* cum præcedenti unitate faciunt 17. Scribo igitur 7, & retineo unitatem, quæ mille importat, pro sequenti columna *D*.

Demum millia 1, 2, 1 columnæ *D* cum præcedenti 1 faciunt 5, quæ scribo infra lineam, & habetur summa quæsitæ 3727.

Sit aliud exemplum. Addendæ sunt in unam summam plures accepti, vel expensi summæ *A, B, C.*

<i>A</i> 104	<i>B</i> 7245	<i>C</i> 235
741	3280	7348
892	834	9532
1380	1273	780

E Sum. 3117 Sum. 12632 Sum. 17895

Peracta operatione, habetur summa *E* 3117, ubi pater, cyphras 0 in additione nihil addere, nam 0, 2, 0, 4, faciunt 7.

II. Præter usitatum additionis explicatæ modum, est alter, in quo operatio procedit a sinistra versus dexteram, & nullus in eo numerus mente retinetur, sed tota summa statim infra lineam describitur. Addendi sint numeri *A, B, C.*

FG

-si A. 1966
 2. 1966
 1966
 B. 7345
 7345
 C. 9289
 9289

 D. 1748
 1748
 E. 112
 112

 X. 18600

1. Incipiens a sinistra, quæ hic millia significat, dico 9 cum 7 faciunt 16, & 16 cum 1 faciunt 17; quem totum scribo sub ipsa columna millium *F*.

2. Colligo centena secundæ columnæ *G*, quæ faciunt 14: pono 4 immediate sub linea, sed 1 sub præcedenti columna *F*, nempe infra 7. Eodem modo notantur decades 18 sub columna *H*, & unitates 20 sub columna *I*.

3. Ducta linea, altera sit additio ordinum *D* & *E*, & habetur summa quæsitæ *X*.

Demonstr. Additionis ratio manifesta est ex *Axiom. 9. lib. 1. Eucl.* nempe totum æquale esse omnibus suis partibus simul sumptis. Tot enim sunt unitates, decades, centena, ac millia in summa reperta *X*, quot unitates, decades, centena, ac millia existunt in summis singulis datis, *A, B, C*. Nam si colligantur unitates sub columna prima *I*, efficiunt 20, hoc est decades 2, proinde ponitur 0, & reservantur 2 illæ decades ad propriam sedem decadum *H*. Similiter, decades collectæ sub columna *H* sunt 18; quæ additis duabus prioribus, 1
fa-

CAP. I. PROP. II.

faciunt 20, hoc est centena 2, adæoque ponitur 0, & reservantur 2 ad sequentem seriem: Sub columna tertiã G sunt 14 centena, quibus si addantur 2 præcedentia, sunt 18. Ponitur itaque 8, & reservatur 1 mille. Demum millia columnæ quartæ F sunt 17, quæ cum præcedenti 1 sunt 18 millia. Patet igitur tot unitates, decades, centena, ac millia in summa X contineri, quot omnino continentur in numeris datis A, B, C. Quod totum patet ad oculos, scilicet

	F	G	H	I
A	1	9	6	6
B	7	3	4	5
C	9	2	8	9
<hr/>				
Unitates			2	0
Decades		1	8	.
Centena	1	4	.	.
Millena	1	7	.	.
<hr/>				
	X	1	8	6
			0	0

PROPOSITIO III.

Additionem examinare.

Multiplici ratione fieri potest examen.

1. Eandem additionem repete, sed ordine mutato, ut si prius ab imo sursum processeris, deinde a summo deorsum descendas: nam si utraque summa inventa eadem fuerit, probabile est, nullum errorem irrepisse.

B

2. A

2. A numeris addendis abjicitur 9 quoties potest, nulla habita ratione ordinis, aut loci, & residuum notatur in angulo crucis. Abjctisque deinde 9 ex summa A , ponitur residuum in altero angulo; quæ residua si fuerint æqualia, recte operatus es, quod patet sequenti exemplo:

$$\begin{array}{r}
 4824 \\
 5721 \\
 3402 \\
 \hline
 A\ 13947
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6 \\
 | \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

Moc examen male audit, ut fallax, nam si pro summa A alia longe major ponatur 19347, iisdem numeris ordine mutato constans, aut si eidem summæ A addas quotcumq; volueris cyphras 0, semper remanet, abjctis novenariis, idem residuum 6. Ceterum ob summam ejus facilitatem non est rejiciendum.

3. Fit abjiciendo omnes numeros septenarios equali bet summa particulari A, B, C , & ponendo seorsim residuum ut in E . Abjctisque deinde 7 ex utraque summa M , & N , si residua in utroque angulo crucis posita æqualia sint, res bene processit. Est autem discrimen inter hoc, & superius examen. Numerus 9 abjicitur per additionem numeri ad numerum, ex gr. ut abjiciam 9 ex 134, sufficit addere simul 4 cum 3 & 1, & habetur statim novenarii residuum 8. At si abjicere velis 7 ex eodem 134, procedendum est per decades, abjiciendo primum 7 ex 13, unde remanet 6, deinde ex 64, & residuum est 1.

$$A\ 3456$$

A 3 4 5 6	E 5	3
B 7 2 0 1	9	
C 3 4 5 8	0	
M 1 4 1 1 5	N 10	3

Hoc quoque examen aliquando fallit, sed ratio. Ratio autem utriusque examinis desumitur ex *Axiom. 3. lib. 1. Eucl.* Si ab æqualibus demas æqualia, residua sunt æqualia.

P R O P O S I T I O IV.

De Subtractione Integrorum.

Subtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem. En praxis.

1. Collocetur numerus minor sub majori, a quo debet subtrahi, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centena centenis respondeant ut de additione dictum est *Prop. 2.*

2. Ducta linea, & dextrorsum incipiendo, auferantur unitates ab unitatibus, decades ex decadibus &c. & id, quod remanet, scribatur infra lineam.

3. Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, ponatur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate minui-

nuitur, vel (idem enim est) subsequens numerus inferior augetur unitate.

4. Demum si numerus inferior sit superiori numero æqualis, ponitur infra lineam 0; vel linea —, si id contingat in fine operationis.

Sit exemplum. Debet quis alteri aureorum summam *A*, non habet nisi aureorum summam *B* solvendam, quærit quantum de ære alieno superfit.

$$\begin{array}{r} A \quad 1 \ 9 \ 2 \ 5 \\ B \quad 1 \ 3 \ 8 \ 2 \\ \hline \end{array}$$

.VI O C T I S 4 3

Primo aufer 2 ex 5, remanent 3, quæ scribe infra lineam. Deinde 8 subduci non potest ex 2, intellige decadem additam ipsi 2, fiet 12, ex quo aufer 8, remanent 4, scribenda infra lineam. At subsequens numerus superior 9, minuitur unitate, vel inferior 3 unitate augetur, proinde subducis 4 ex 9, residuum est 5, quod scribe infra lineam. Demum auferendo 1 ex 1, nihil remanet, scribe lineam: Debet igitur adhuc aureos 543, cum talis sit excessus numeri majoris *A* supra minorem *B*.

Similiter subduci debet numerus *N* ex numero *M*, quæritur excessus, seu residuum *X*.

$$\begin{array}{r} M \ 6 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2 \ 7 \\ N \ 3 \ 1 \ 9 \ 5 \ 7 \ 6 \ 8 \ 4 \\ \hline X \ 5 \ 8 \ 8 \ 0 \ 5 \ 2 \ 3 \ 4 \ 3 \end{array}$$

Aufer

Aufer 4 ex 7, residuum est 3. Item 8 ex 12, residuum est. Pariter 7 ex 10, residuum est 3. Similiter 8 ex 10, residuum est 2, tum 6 ex 11, residuum est 5, & 10 ex 10, residuum est 0 &c.

Examen subtractionis generatim fit addendo residuum X numero minori subtracto N. Nam si erratum non sit, restituitur major numerus M, ut patet.

Examen fieri quoque potest per abjectionem novenarii. Nam abjectio novenario ex A, quantum abjici potest, residuum est 8. Deinde abjecto novenario ex numeris B & C, æqualibus ipsi A, residuum pariter est 8.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 6 \ 4 \ 3 \ 4 \\
 B \quad \quad 5 \ 2 \ 1 \\
 \hline
 C \quad 5 \ 9 \ 1 \ 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8 \ | \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

Demonstr. Subtractionis per se patet. Nam ex *Defn.* subtractio est inventio excessus, quo numerus major superat minorem, proinde excessus una cum minori numero adæquat majorem; adeoque tot unitates, decades, & centena debent esse in B, & C simul, quot sunt in A. Sed subducendo 1 ex 4, ponitur residuum 3. Sunt ergo tot unitates in B, & C simul, quot sunt in A, nempe 4. Similiter subducendo decades 2 ex decadibus 3, ponitur 1 in residuo. Igitur decades B & C æquales sunt decadibus in A contentis, nempe 3, & sic deinceps. Est ergo æqualitas inter A, & B una cum C. Quod &c.

PRO-

P R O P O S I T I O V.

De Multiplicatione Integrorum.

Multiplicatio est ductus unius numeri in alium, ex quo alter toties augetur, quoties in altero unitas continetur.

Vel *Multiplicatio* numeri per numerum est inventio numeri, qui toties contineat numerum multiplicatum, vel multiplicantem, quot alter continet unitates. Ut numerus A 12 multiplicatus per B 3 producit numerum C 36, qui ter continet A , sicuti B ter continet unitatem. Hinc patet multiplicationem esse compendiosam additionem; idem enim est multiplicare A per B , ac toties addere ipsum A , quot sunt in B unitates.

Numeri A & B dicuntur *multiplicatores*, seu *factores*, numerum C *productum*, seu *factum*. Vulgo tamen qui minor est, & inferius scribitur, dicitur multiplicator, seu multiplicans, major autem multiplicandus appellatur. En praxis.

1. Si multiplicator unica figura constet (ut in primo sequenti exemplo) illa ducatur singillatim in omnes multiplicandi figuras, initio facta a dextra versus sinistram; & quot productum continet decades, tot reserventur unitates sequenti producto adjiciendæ, & scribatur infra lineam id quod remanet.

2. Si multiplicator pluribus constet figuris, tunc singulæ seorsum ducantur in singulis numeri multiplicandi figuras, sed producta ita infra lineam scri-

scribantur, ut productum secundæ ponantur directe sub ipsa secunda figura, productum tertiæ figuræ sub tertia, & sic deinceps, cum hæc producta importent decades, centena &c.

3. Ducta linea, singula producta particularia in unam summam colligantur, ut habeantur integrum productum quæsitum.

Sit exemplum 1. Vendendi sunt agni *A* juliis 5 in singula capita, quæritur pretium *C*.

$$\begin{array}{r}
 A \ 1 \ 2 \ 7 \ 6. \ \text{multiplicandus.} \\
 \ 5. \ \text{multiplicans.} \\
 \hline
 C \ 6 \ 3 \ 8 \ 0. \ \text{productum.}
 \end{array}$$

Primo 6 quinquies sumptus facit 30, pono 0, & sequenti producto addo tres unitates ob tres decades producti primi. Deinde 7 quinquies sumptus facit 35: addo 3, fiunt 38, scribo infra lineam 8, & reservo 3. Tum 2 quinquies sumptus facit 10, addo 3 fiunt 13, scribo infra lineam 3, & servo 1. Demum 1 quinquies sumptus facit 5, addo 1 præcedentem, & scribo 6.

Exemplum 2. Quæritur quot horas annus unus contineat, qui dies 365 continere supponitur.

$$\begin{array}{r}
 \text{Dies} \quad 3 \ 6 \ 5 \\
 \text{Horæ} \quad \ 2 \ 4 \\
 \hline
 \phantom{\text{Dies}} \ 1 \ 4 \ 6 \ 0 \\
 \phantom{\text{Dies}} \ 7 \ 3 \ 0 \\
 \hline
 \text{Horæ} \ 8 \ 7 \ 6 \ 0
 \end{array}$$

Exem-

Exemplum 3. Aerarii præfectus exigit annuatim ab oppidis 824 aureos 102, quaeritur aureorum summa.

$$\begin{array}{r}
 \text{Opp.} \quad 824 \\
 \text{Aur.} \quad 102 \\
 \hline
 \quad \quad 1648 \\
 8240 \\
 \hline
 \text{Aur.} \quad 84048
 \end{array}$$

Coroll. Hinc patet, quod si in multiplicatore occurrit cyphra 0, ponitur in producto cyphra (vel plures, si sint) deinde statim continuatur multiplicatio ceterorum numerorum. 7

Schol. I. *Cyphrae initiales ante operationem rescantur; operatione autem peracta, producto adduntur quotquot sunt. Pariter si multiplicandus sit numerus per 10, vel 100, vel 1000 &c. satis est addere multiplicando ad dexteram tot cyphras, quot continentur in multiplicatore, sine ulla alia operatione, quia unitas non multiplicat. Utrumque patet exemplis A & B.*

$$\begin{array}{r}
 A \quad 136 \mid 0 \quad B \quad 15724 \\
 \quad \quad 2 \mid 00 \quad \quad \quad 1000 \\
 \hline
 272,000 \quad 15724,000
 \end{array}$$

Schol. II. *Multiplicatio fit etiam per factores numeri multiplicantis, vel multiplicandi. Sic idem est multiplicare 30 per 24, ac 30 per 4 & 6 hoc est 30 per 4, ejusque productum per 6.*

Schol.

Schol. III. *Multiplicatio fit etiam per tabulam, quæ ab ejus auctore Pythagora vocatur Pythagorica. En usus; si scire velis productum ex. gr. ex 3 in 8, quæro 3 in columna AB, & 8 in fronte AC, invenies in communi concursu productum 24. Sic de ceteris. Ratio est, quia columna prima incipit ab unitate, & descendendo crescit usque ad 9. Secunda incipit a binario, tertia a ternario &c. semper usque ad 9 progredientes. Prima crescit sola unitate, secunda numero binario, tertia ternario &c. In exemplo allato numerus 8, qui crescit numero octonario, habet in tertia sede numerum 8 ter sumptum, scilicet 24. Idem numerus 8 ter sumptum, scilicet 24. Idem numerus 8 habet in quinta sede 40, hoc est 8 quinques sumptum, & sic de ceteris.*

A	Tabula Pythagorica.										C
1	2	3	4	5	6	7	8	9			
2	4	6	8	10	12	14	16	18			
3	6	9	12	15	18	21	24	27			
4	8	12	16	20	24	28	32	36			
5	10	15	20	25	30	35	40	45			
6	12	18	24	30	36	42	48	54			
7	14	21	28	35	42	49	56	63			
8	16	24	32	40	48	56	64	72			
9	18	27	36	45	54	63	72	81			

B

C

D

Schol.

Schol. IV, *Tabulam Pythagoricam in plures tabellas oblongas mobiles dissectuit Jo: Neperus Scotus, quibus mirabili artificio multiplicationis, & divisionis compendium exhibetur. En constructio. Fiant ex ære, vel ligno, aliave materia solida decem vel undecim tabellæ, seu parallelepipeda, ut sunt AB, CD; quorum longitudo dividatur in 9 quadrata æqualia; iisque per diametrum divisus (excepto uno XZ, cui inscribuntur simpliciter numeri naturales 1, 2, 3, 4 &c. usque ad novem inclusive, qui experimentes vocantur) habentur totidem triangula æqualia, quibus inscribendi sunt numeri ex singulis columnis ejusdem Tabulæ Tabulæ Pythagoricæ; ita tamen ut in uno parallelepipedo quadrata superiora habeant numeros 1, 2, 3, 4. In secundo numeros 2, 3, 4, 5. In tertio 3, 4, 5, 6, & sic successive. Sic enim poterit idem numerus, si opus sit, iteratio haberi, ex.gr. 555. In uno, vel altero parallelepipedo ponuntur ubique cyphræ. Ecce autem usus.*

Esto multiplicandus 578 per 69. Jungantur simul tria parallelepipeda, quæ in vertice referant numerum datum 578 (ut in figura) præfixo ad levam parallelepipedo XZ exponentium, ex quo habentur numeri multiplicatoris 6 & 9. Jam singula facta numeri 9 in 578 exhibentur in triangulis, & rhombis directe ad ipsum 9 appositis, facto initio a triangulo inferiore dextrosfum, & addendo numeros in rhombis positos, nempe 3202. Eodem modo habentur facta numeri 6 per 578, nempe 3468, quæ addita, ut superius num. 2. dictum est, dant productum integrum 39882.

A	C
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
B	D

X			
1	5	7	8
2	10	14	16
3	15	21	24
4	20	28	32
5	25	35	40
6	30	42	48
7	35	49	56
8	40	56	64
9	45	63	72
Z			

Multiplicationis examen fieri potest per abjectionem novenarii, aut septenarii. Nam 1^o. abjicitur 9, vel 7 ex numero multiplicando A, & residuum ponitur in angulo crucis M. 2^o. Rejjicitur 9, vel 7 ex multiplicante B, cujus residuum ponitur in angulo crucis N. 3^o. Multiplicantur inter se M & N, & ex producto abjicitur 9, vel 7, residuum:

C 2

que

que scribitur in angulo R . 4°. Rejctis 9, vel 7 ex producto C , habetur residuum, quod si æquale sit residuo priori R , res bene processit.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 3 \ 5 \ 0 \ 6 \\
 B \quad \quad 1 \ 3 \ 2 \\
 \hline
 D \quad \quad 7 \ 0 \ 1 \ 2 \\
 E \ 1 \ 0 \ 5 \ 1 \ 8 \\
 F \ 3 \ 5 \ 0 \ 6 \\
 \hline
 C \ 4 \ 6 \ 2 \ 7 \ 9 \ 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 M \ 5 & 3 \ R \\
 \hline
 N \ 6 & 3 \ T \\
 \\
 \hline
 6 & 1 \\
 \hline
 6 & 1
 \end{array}$$

Et etiam *examen per divisionem*. Nam si dividatur productum C per alterutrum factorem A , vel B , prodibit in quotiente alter factorum A , vel B . Sed prius intelligendum, quid sit divisio, de qua in sequenti *Prop.*

Demonstr. Cum multiplicatio sit compendiosa additio, ut dictum est, multiplicatio numeri A per notam ultimam numeri B , nempe per 2, est addere ipsum numerum A bis, unde producitur D 7012, in quo tot sunt unitates, decades, ac centena, quot habentur in A bis sumpto. Similiter multiplicatio ejusdem numeri A per secundam notam numeri B , nempe per 3, qui significat 30, est additio ipsius A sumpti trigesies, unde productum E tot continet unitates, decades, centena &c. quot continentur in A trigesies sumpto. Demum productum F habetur ex multipli-

tiplicatione numeri A per 1, hoc est per 100; adeoque tot unitates, decades &c. continentur in F , quot continentur in A , si centies sumatur. Igitur tres numeri D , E , F , seu productum integrum C , tot continet unitates decades &c. quot continentur in A centum trigesies, & bis sumpto. Quod erat &c.

P R O P O S I T I O VI.

De Divisione Integrorum.

D*ivisio* est inventio numeri, qui toties unitatem contineat, quoties numerus dividendus continet divisorem. Numerus inventus dicitur *quotiens*, *quotus*, vel *exponens*; exponit enim per suas unitates, quoties divisor continetur in dividendo. Itaque dividendo numerum 12 per numerum 3, invenitur quotus, sive exponens 4, qui toties continet unitatem, quoties dividendus 12 continet divisorem 3.

I. Sit divisor numerus simplex 5, per quem dividendus est numerus datus 1580455. Ponatur divisor sinistrorsum seorsim post lineam, ut in M .

Divisor M 5) 1 5 8 0 4 5 5. *dividendus.*
 3 1 6 0 9 1. *quotus.*

Et

Et procedendo a sinistra in dexteram, vide quoties 5 continetur in 15, nempe ter, subscribe 3. Deinde vide quoties idem 5 continetur in subsequenti numero 8, continetur semel, & remanent 3. Scribe 1 sub ipso 8, tum adde decades tres sequenti figuræ dividendi, fiunt 30, quibus divisus per 5, habetur quotus 6, quem pone sub 0. Postea 4 dividi nequit per 5, utpote minor, pone igitur 0 in quoto, & adde quatuor decades subsequenti numero 5, fiunt 45, quæ dividantur per 5, erit quotus 9, quem subscribe. Demum dividendo 5 per 5, habetur quotus 1. Quotus igitur quæsitus est 316091. Hic dividendi modus vulgo dicitur: *partire a columna*.

Fieri etiam potest hæc divisio præsidio tabulæ Pythagoricæ, de qua in *præc. Prop.* Nam numerus dividendus in media area reperitur; divisor vero in latere *AB*, & quotus in fronte *AC*. Sit dividendus numerus 40 per 5, reperto 40 in area, & divisore 5 in latere *AB*, invenitur in fronte *AC* quotus 8. Quod si dati numeri 40 divisor fuerit 8, invenietur in fronte quotus 5; & sic de aliis.

Sin autem numerus dividendus in area tabulæ præcise non reperitur, ut si dividendus sit 50 per 6; sumitur numerus proxime minor, cui directe respondet divisor 6 in latere existens, nempe 48, & in fronte occurrit 8, qui erit quotus quæsitus.

Examen hujusce divisionis fit multiplicando quotum per divisorem. Si erratum non sit, restituitur idem numerus, qui fuit divisus, ut patet.

II. Quod

II. Quod si divisor sit numerus compositus, pluribus constans figuris, alia via procedendum. Dividendus sit numerus datus A per B .

$$B \ 45 \) \quad A \ 186730$$

$$180$$

$$C \ 4149 \) \quad - \ 67$$

$$45$$

$$223$$

$$180$$

$$- \ 430$$

$$405$$

$$- \ 25$$

1. Accipe ex dividendo A tot figuras finistrorsum, quot sunt in divisore B . Vel accipe tot figuras ex numero dato A , quot per divisorem B dividi possint; ut in hoc exemplo 186, easque fecerne puncto. Erit 186 primum divisionis membrum.

2. Vide quoties divisor B contineatur in 186: quod quia primo intuitu dignoscere haud facile est, vide quoties prima divisoris figura 4 contineatur in 18; patet contineri quater, & remanent 2, quæ cum sequenti figura 6 faciunt 26, in quo secunda divisoris figura 5 pariter continetur quater (nihil autem refert si pluries contineatur) totus ergo divisor 45 continetur quater in toto divisionis membro 186, proinde pone 4 in C .

3. Per

3. Per quotum C multiplica totum divisoram B 45, & productum 180 subscribe ipsi 186, a quo illud subtrahe per *Propos. IV.* remanent 6.

4. Ad hoc residuum 6 junge dextrorsum subsequentem dividendi figuram 7, erit 67 secundum divisionis membrum; eademque omnino operatio instituenda est, quam breviter in gratiam tyronum prosequar, scilicet

Quære quoties divisor 45 contineatur in 67, patet contineri semel, scribe ergo in C 1, per quem multiplica totum divisoram B , & productum 45 subscribe ipsi 67, factaque subtractione, habetur residuum 22. ○

Ad hoc residuum 22 adjunge sequentem dividendi figuram 3, fiet tertium divisionis membrum 223. Circa quod rursus eadem operatio repetenda est.

Proinde vide quoties divisor 45 contineatur in 223: seu quoties prima figura 4 contineatur in 22; patet contineri quinquies, & remanent 2, quæ una cum sequenti figura 3 faciunt 23. Sed secunda divisoris figura 5 non continetur quinquies in 23, proinde quotus ille 5 minui debet unitati (vel etiam pluribus, si opus sit) & reponitur 4 in C ; per quem multiplicato divisore B , habetur productum 180, quod subscribe ipsi 223, ab eoque subtrahe, remanent 43.

Junge demum ad 43 ultimam dividendi figuram 0, erit quartum divisionis membrum 430, quocirca eadem praxis facienda est. Vide igitur quoties 4 contineatur in 43, dic contineri tantum novies (nam nullus quotus ponitur in C

ma

major, quam 9) remanent 7, quæ cum cyphra faciunt 70, in quo pariter altera divisoris nota 5 continetur novies. Itaque multiplicando divisorem 45 per 9 habetur productum 405, quod subtrahendum est ab ipso 430, & residuum divisionis est 25. Quotus ergo quæsitus C est 4149, & remanent 25.

Coroll. Ex præcedenti exemplo tria sunt colligenda. 1. Si secunda, tertia, aut quarta divisoris nota toties contineri non possit in secunda, tertia, aut quarta nota dividendi, quoties prima ejusdem divisoris nota continetur in prima nota dividendi, tunc quotum una, vel pluribus unitatibus esse minuendum. 2. In quoto nunquam reponi numerum majorem novenario, etiam si divisor pluries, quam novies contineatur in dividendo. 3. Integrum quotum totum tot figuris constare, quot sunt divisionis membra.

Sit aliud exemplum. Dividere oporteat numerum datum M per numerum N .

N 179)

M 73394475

716

R 410025)

— 179

179

000447

358

— 895

895

000

D

I. Se

1. Secerne puncto ex dividendo M tres figuras 733, quot sunt in divisore N , erit primum divisionis membrum 733. Jam prima divisoris nota continetur in prima dividendi nota septies, sed cum secunda, & tertia divisoris nota contineri non possunt in secunda, & tertia nota dividendi pluries, quam quater, minuitur 7 tribus unitatibus, & ponitur in R quotus 4.

2. Duc divisorem N in 4, & productum 716 subseribe ipsi 733, a quo subtrahendum est, remanent 17. Adde ex dividendo subsequentem figuram 9, faciunt 179, eritque secundum divisionis membrum, in quo patet, divisorem contineri semel, proinde pone in quoto 1, per quem multiplicando divisorem, habetur productum 179, subducendum ex ipso 179, adeoque remanet 0.

3. Divisor contineri non potest in duabus subsequentibus dividendi figuris 44, pone ergo in quoto totidem cyphas, & adde ad 44 aliam figuram ex dividendo, nempe 7, quæ faciunt 447, in quibus divisor continetur bis. Pone igitur in quoto 2, & cetera prosequere, ut supra. Erit quotus R 410025 sine ulla residuo.

Schol. I. *Quod remanet post singulas subtractiones, nunquam potest esse aequale, aut majus divisore, alias fuit erratum. Assumptus enim fuit quotus justo minor. Contra vero si productum ex quoto in divisorem majus sit residuo divisionis, ex quo fieri debet subtractio, ita ut subtractio fieri non possit, signum est, quorum assumptum esse justo majorem, ac proinde esse minuendum. Utrumque casum tyrones diligenter advertant.*

Schol.

ras dextrorsum ex dividendo 635; diviso deinde 6 per 2, habetur quotus $3\frac{1}{2}$. Quod si prima divisoris nota fuerit 1, & reliquæ omnes cyphræ, ut 10, 100, 1000 &c. confecta erit divisio, si ad dexteram dividendi abscindas totidem figuras; quot sunt in divisore cyphræ, nam unitas non dividit. Proinde dividendo 145690 per 10000, quotus erit $14\frac{1690}{10000}$; dividendo per 1000, quotus erit $145\frac{690}{1000}$ &c.

Schol.V. Est alius non inelegans dividendi modus, quem Itali vulgo vocant, partire per ripiego; qui tunc solum adhiberi potest, cum divisor potest resolvi in suos factores: Sit dividendus numerus 15490 per 45, quia divisor 45 resolvi potest in suos factores 5 & 9, ex quibus componitur, divide primo per 5, quotus est 3098: divide deinde quotum 3098 per 9, oritur quotus quæsitus $343\frac{1}{9}$. Similiter dividendus sit 13463 per 36, qui 36 componitur ex 4 & 9, divide per 4 numerum datum, quotus erit $3365\frac{3}{4}$, hunc divide per 9, quotus erit $373\frac{1}{9}$. Ut ex duabus illis fractionibus fiat unica fractio, duc residuum 8 in divisorem 4, & producto adde residuum primum 3, fit 35. Duc deinde 4 in 9 fit 36, erit fractio $\frac{35}{9}$, unde $373\frac{11}{9}$ quotus quæsitus. Ratio hujus suo loco innotescet.

Examen divisionis fit per multiplicationem. Nam multiplicando divisorem per quotum, restituitur numerus dividendus, modo illi addatur, si quid ex divisione remansit.

Vel fit examen per abjectionem 9, vel 7. Nam rejectis primo 9, vel 7 tum ex divisore, tum ex quo-

quoto, residua 8 & 4 notantur in angulo crucis sinistro *A* & *B*, & ducuntur inter se, deinde producti residuum 5, abjectis 9 vel 7, ponitur in vertice ipsius crucis, cui quidem additur residuum divisionis factæ, ablatisque ex hac summa 9, vel 7, quod remanet, ut hic 0, ponitur in angulo crucis dextero *C*, cui æquale debet esse id, quod restat ex dividendo, abjectis pariter 9, vel 7, & notatur in *E*. Patet sequenti exemplo.

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \hline
 130
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4563 \\
 \hline
 106
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 A8 \\
 \hline
 B4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 5 \\
 | \\
 \hline
 0 \\
 | \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 C0 \\
 \hline
 E4
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 6 \\
 | \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

Demonstr. Ex praxi a nobis tradita tot notis constare debet quotus, quot sunt membra divisionis, ut in *Coroll. n. 3.* dictum est. Sed singulæ quoti notæ toties unitatem continent, quoties singula divisionis membra divisorem: nam in primo exemplo, in quo dividitur 186730 per 45, primum membrum divisionis 186 continet quater divisorem 45, sicuti prima quoti nota 4 continet unitatem. Siquidem ex regula tradita ducitur 45 in 4, & productum 180 (divisoris 45 quadruplum) subtrahitur ex membro divisionis 186, ergo patet, divisionis membrum 186 quater continere divisorem, sicuti quotus 4 totidem unitates continet, alias subtrahi non posset. Remanet quidem, facta subtractione, numerus senarius, sed hic sequenti figuræ 7 jungitur pro secundo divisionis membro, ut dictum est. Pari ratione idem ostenditur.

30 DE CALCULO INTEGRORUM
 ostenditur de singulis ipsius quoti notis; unde
 sequitur, integrum quotum 4149 toties unitatem
 continere, quoties dividendus 186730 continet
 divisorem 45, adeo ut quotus 4149 æque mul-
 tiplex sit unitatis, ac dividendus æque multiplex
 est divisoris, & supersint 25.

PROPOSITIO VII.

*De divisione integrorum per numeros divisoris
 multiplices.*

Methodus dividendi numerum per numeros
 divisoris multiplices adhiberi potissimum
 solet, cum numerus dividendus est valde pro-
 lixus.

*Sit exemplum, Ex doctrina Tychonis sol motu
 diurno horarum 24 peragit orbitam milliariorum
 Italicorum 21400 11712, queritur quot milliaria
 conficiat uno horæ minuto. Reducantur horæ 24
 in minuta, multiplicando illas per 60, erit di-
 visor, per quem dividi debet numerus milliario-
 rum A, 1440, seu 144, (ablata ab ipso cyphra,
 & ex dividendo A ultima nota dextrorsum 2)
 qui ponatur ad dexteram dividendi, ut in B,
 & notetur punctum sub tertia ipsius dividendi no-
 ta 4, cum divisor B semel contineatur, in 214,
 ut in *prac. Propos.* dictum est. Tum scribantur
 sub ipso divisore B singuli multiplices 288, 432,
 576 &c. cum notis appositis 1, 2, 3, 4 &c.
 ut in exemplo.*

Qui-

Quia divisor B continetur semel in 214 , scribatur 1 in quoto C , subtractoque divisore ipso ex 214 , remanent 70 , additaque sequenti figura dividendi, fiunt 700 . Tunc observetur qualis ex multiplicibus sub B existentibus sit proxime minor, quam 700 , patet illum esse 576 . Pone igitur in quoto notam illi appositam 4 , & subtrahere ipsum 576 ex residuo 700 , remanent 124 , quibus addita figura sequenti, habetur 1240 . Iterum observa, qualis multiplex sit proxime minor ipso 1240 , reperitur 1152 , cui apposita est nota 8 , hanc pone in quoto C , & illum subtrahere ex residuo 1240 , residuum est 88 , & sic deinceps, donec exhaustantur omnes dividendi figuræ. Sic enim nullo fere labore invenitur quotus 1486119 , cum residuo $\frac{88}{1400}$, quod quartam fere milliarii partem importat, ut in *Cap. sequen.* explicabitur. Sol igitur unico horæ minuto conficit milliaria Italica 1486119 .

C	A	B	
$148\dots\dots$	214001712011	144	144
	<u>144</u>	144	02
	<u>700</u>	432	15
	<u>576</u>	376	4
	<u>1240</u>	720	5
	<u>1152</u>	864	6
	<u>88</u>	1008	7
		1152	8
		1296	9

Schol.

Schol. I. Est etiam facillima divisio per tabellas Neperianas, de quibus dictum est in Schol. 4. Propos. V. quæ ex hac Propos. sequitur. Nam esto dividendus numerus A 142188 per B 578. Apponentur tres tabellæ, quæ in vertice referant divi-forem 578, præfixa illis tabella numerorum exponentium 1, 2, 3, 4, &c. (vid. tabellam XZ pag. 19.) Tum determinantur puncto in numero dividendo tot nota, quot divisibile sunt per 578, nempe 1421. Patet exponentes 1, 2, 3, 4, indicare summas multiplices, hoc est duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius divisoris 578; quod ex ipsa constructione tabellarum, & ex Schol. præcit. facile intelligitur. Collectis enim in unam summam numeris ex triangulis, & rhombis directe ad exponentem ex. gr. 2 appositis, habetur duplum ipsius 578, nempe 1156, & sic de aliis. Observa igitur qualis numerus sit aequalis, vel proxime minor dividendi membro 1421, occurrit statim in secundo ordine summa 1156, proinde ejusdem ordinis exponens, nempe 2, est quotus quaesitus, qui ponatur in C, subtractisque 1156 ex dividendo 1421, remanent 265. Pro secundo divisionis membro adde sequentem notam 8, sunt 2658, & eodem modo operare: hoc est observa in tabellis, qualis sit numerus proxime minor 2658 invenies in quarto ordine summam 2312, quæ indicat quotientem 4 ponendum in C, subtractisque 2312 ex 2658, residuum est 346. Addita demum ultima figura 8, sunt 3468, quæ in tabellis quaesita, dant quorum 6 sine ullo residuo. Est ergo quotus 246. Quod totum tum ex tabella præ-

præ-

præcitata XZ, tum ex sequenti schemate satis patet.

$$\begin{array}{r}
 G246 \quad A \quad 142188 \quad B \quad 578 \\
 \quad \quad \quad 1156
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \hline
 2658 \\
 2312 \\
 \hline
 3468 \\
 3468 \\
 \hline
 0000
 \end{array}$$

Schol. II. Si membrum dividendum minus se ipso divisore, additur quoto cyphra, & alia figura membro dividendo adijcitur, ut in Prop. VI. dictum est. Cæterum si quis in hac dividendi præxi sit aliquanto exercitatus, divisiones etiam prolixas citissime expediet, eritque minus obnoxius erroribus, qui inter dividendum ex incuria, vel hallucinatione nascuntur.



E

CA-

CAPUT III.

De Calculo Denominatorum.

Regulæ vulgaris Arithmeticæ hætenus traditæ applicari jam debent numeris *denominatis*, hoc est numeris diversarum specierum. Quod quidem difficile non erit, si dignoscatur valor unius speciei respectu alterius; nimirum quot partes minoris speciei majorem speciem constituent. Sic ut addantur, vel subtrahantur dies, horæ, ac minuta, necesse est scire minuta temporis 60 unam horam, horas autem 24 diem unum efficere. Idem de monetis, ponderibus, ac mensuris valet: quæ licet pro diversitate Provinciarum, imo, & Urbium variæ sint, modus tamen eas calculandi est ubique proportionaliter idem; adeo ut si quis unius loci monetas, pondera ac mensuras addere, subtrahere, multiplicare, ac dividere noverit, ad alterius quoque regionis calculum easdem regulas applicare facile poterit.

PROPOSITIO I.

De Additione numerorum denominatorum.

I. **E**xemplum sit de vulgari moneta Romana, quam componunt scuta, asses, & quadrantes; hoc est quadrantes 5 assen 1, & asses 100 scutum 1, quod decem denariis argenteis, seu juliis constar.

-AD

E

Dispo-

Disponantur species similes sub similibus; ac primo quidem loco dextrorsus species minima, tum ordine majores usque ad maximam; ut in hoc exemplo collocentur primo quadrantes, secundo asses, tertio scuta; & si qua species intermedia desit, vacuus ejus locus repleatur cyphra.

Tum addendo quadrantes 1, 4, 3, 0, sunt 8, quibus continetur assis 1, & remanent 3, quæ scribe infra lineam. Adde deinde assen 1 ad sequentem seriem assium, nempe ad 5, 0, 8, 5 sunt 19 asses. Scribe 9 infra lineam, & pro decade una adde 1 ad assium decades 1, 2, 9, 3, sunt decades 16, hoc est asses 160; reserva itaque decades 10, (centenarium nempe 1) pro sequenti specie, & scribe infra lineam 6. Addantur denique unitates, decades, & centena scutorum eodem modo factum est in Propos. 2. Cap. 1. cum sint numeri homogenei, prodibit summa scutorum 5099. 69 asses 69; quadr. 3.

	Scut.	Ass.	Quad.
	2 3 0.	3 5	0.
	5 7 2.	9 8.	3.
	7 8 4.	2 0.	4.
	3 5 1 2.	1 5.	1.
Summa	5 0 9 9.	6 9.	3

II. Libra in Urbe constat unciis 12, uncia vero denariis 24. Addendæ sint ergo.

36 DE CALCULO DENOMINATORUM

	<i>Lib.</i>	<i>Unc.</i>	<i>Den.</i>
	3 8.	1 0.	2 3.
	7 0.	1 1.	1 6.
	3 5 2.	0 5.	2 2.
	4 6 2.	0 4.	1 3.

Habentur libræ 462, unc. 4, den. 13. Nam denarii 22, 18, 23 additi faciunt 63, in quibus bis continetur 24, hoc est uncia 2, quæ sequenti columnæ addendæ sunt, & remanent denarii 13, quos scribe infra lineam. Similiter uncia 5, 11, 10 cum duabus præcedentibus faciunt 28, qui continet bis 12, nempe libras 2, sequenti columnæ addendas, & remanent uncia 4, quæ pariter scribuntur infra lineam. Demum additis libris 2 ad prædictam librarum columnam, continuatur additio, ut in *Propof. 2. Cap. 1.*, & habentur libræ 462, unc. 4. den. 13.

III. Addendi sunt pedes Parisienses, pollices, & lineæ. Pes autem Parisiensis in pollices 12, pollex vero in lineas 12 dividitur. Sint ergo.

	<i>Pedes</i>	<i>Poll.</i>	<i>Lin.</i>
	1 2 8.	1 0.	9.
	3 2 0.	1 1.	2.
	5 7 2.	0 8.	7.
	1 0 2 2.	0 6.	6.

Quod quidem manifestum est: nam 7, 2, 9 faciunt lineas 18, hoc est pollicem 1, qui referatur

vatur sequenti columnæ addendus, & scribitur infra lineam residuum 6. Deinde pollices 8, 11, 10 cum 1 præcedenti, fiunt 30, qui bis continent 12, hoc est pedes 2 sequenti columnæ addendos, & scribitur infra lineam residuum 6. Demum additis pedibus 2 ad primam columnam sequentem, continuatur additio, ut in *Propos. 2. Cap. 1.* cum sint numeri homogenei.

Examen fieri potest sic: completa superioris exempli additione, duc lineam sub ordine numerorum *A*; atque iterum adde omnes numerorum ordines modo jam explicato, præter solum ordinem *A*, qui relinquitur: habebis alterum aggregatum *C*, quod deficit ab aggregato primo *B*, defectu numerorum ordinis *A*. Si ergo aggregato *C* addas numeros *A*, habebis aggregatum *D* æquale aggregato primo *B*; alias fuit erratum. Hoc examen usurpari quoque potest pro numeris homogeneis, ut patet.

	Ped.	Poll.	Lin.
--	------	-------	------

<i>A</i>	12	8	9
----------	----	---	---

3	210	11	8
---	-----	----	---

5	72	08	7
---	----	----	---

<i>B</i>	1022	06	6
----------	------	----	---

<i>C</i>	893	07	9
----------	-----	----	---

<i>D</i>	1022	06	6
----------	------	----	---

PRO-

PROPOSITIO III.

De Subtractione numerorum denominatorum.

Disponatur species similes sub similibus, ut in *præc. Propos.* dictum est, & numeris minor, seu subtrahendus, collocetur sub majori, ad quo debet subtrahi.

Quoties inferior numerus a superiori subducitur nequit, utpote illo maior, toties numero superiori addatur unum integrum sequentis speciei, ut fiat major subtrahendo. Deinde numerus speciei, ex qua sumptum fuit illud integrum, unitate minuatur. Quod exemplis patebit.

I. Ex pecunia accepta *A* subtrahenda sit pecunia expensa *B*. Quia quadrantes 4 subtrahi nequeunt ex quadrantibus 3, sumo 1 ex assibus 28, hoc est quadrantes 5, qui cum 3 faciunt quadrantes 8, ex quibus subductis 4, remanent 4 infra lineam scribendi. Deinde minuendo unitate 28, vel augendo unitate [idem enim est] asses 36, ita ut ~~prima figura 6~~ fiat 7, subducitur 7 a superiori numero 8, & scribitur infra lineam residuum 1. Rursus quia 3 subtrahi nequit ex 2, sumo 1 ex scutis, ut ad 2 addantur 10, ac fiat 12, ex quo subtractis 3, residuum, quod scribitur infra lineam, est 9. Minuitur deinde 8, uel augetur 7 unitate, & fit 0. Tum continuatur subtractio, ut in *Prop. 4. Cap. 1.*, & habetur residuum C scut. 140, ass. 91, quadr. 4.

Scut.

	<i>Scur.</i>	<i>Afs.</i>	<i>Quadr.</i>
A	908	28	3
B	57	36	4
<hr style="border: 1px solid black;"/>			
C	409	1	4

II. Subtrahendus fit numerus *N* ex numero *M*, scilicet.

	<i>Dies.</i>	<i>Hora.</i>	<i>Min.</i>
M	21	14	53
N	10	13	57
<hr style="border: 1px solid black;"/>			
Q	11	00	56
<hr style="border: 1px solid black;"/>			
	21	14	53

Cum minuta 57 subtrahi nequeant ex minutis 53, desumitur unum integrum ex sequenti specie, nempe hora 1, seu minuta 60, quæ addita minutis 53 faciunt min. 113, ex quibus subtractis 57, scribitur infra lineam residuum 56. Aucto deinde unitate numero 13 fit 14, adeoque facta subtractione, nullum est residuum, & scribitur 0. Demum subductis 10 ex 21 residuum est 11, est ergo numerus quæsitus Q dies 11 min. 56.

Examen fit addendo residuum Q numero minori N, nam facta additione, ut in *Propos. præc.* dictum est, restituitur major numerus M, si erratum non fuerit.

PROPOSITIO IIII.

De Multiplicatione numerorum denominatorum.

Primo reducantur omnes species ad minimam, ut si multiplicandæ sint libræ, solidi, ac denarii, reducantur omnes ad denarios. Deinde species reductæ multiplicentur, ut moris est, per *Prop. 5. Cap. 1.* Productum vero reducitur ad majorem speciem per *divisionem.*

I. *Sit exemplum.* Plancus expendit singulis diebus libras 5, solidos 15, denarios 8. Scire cupit, quantum toto anno, seu diebus 365, expendet. Cum denarii 12 solidum unum, solidi vero 20 libram constituent, duc libras 5 in 20, producto adde 15, habebis solidos 115. Quos quidem duc in 12, & producto adde 8, habebis denarios 1388; qui multiplicandi sunt per dies 365, fitque per *Prop. 5. Cap. 1.* productum denariorum 506620. Hos divide per 12, habebis solidos 42218, & denarios 4; Utque solidi ad libras reducantur, divide illos 20, erunt libræ 2110, & solidi 18. Itaque Plancus uno anno expendet lib. 2110, sel. 18, den. 4. En totius reductionis typus.

Lib. 5	20	100
15	100	1500
8	100	800
Add	15	115
Sol.	115	1388

Sol.

Sol. 115
 ———
 230
 115
 ———
 11380
 adde 8

Den. 1388

II. *Sit exemplum.* Cum sol motu proprio conficiat singulis diebus minuta 59, & secunda 8, queritur quantum progrediatur diebus 30. Reducantur minuta 59 ad secunda, multiplicando illa per 60, & addendo 8 ad eorum productum, fient secunda 3548, quae multiplicari debent per dies 30. Erit per *Propos. 5. Cap. I.* productum 106440 secundorum. Hae divide per 60, quotus dat minuta 1774, quae quidem si iterum dividas per 60. habebis gradus 29, & min 34, quos sol motu proprio percurrit in Ecliptica diebus 30.

Examen multiplicationis fit per divisionem, de qua in sequenti Propos.

PROPOSITIO IV.

De divisione numerorum denominatorum.

TAm divisoris, quam dividendi species reducantur ad minimam, ut factum est in *prac. Propos.* Tum fiat divisio per *Prop. 6. Cap. I.*

F

I. Emit

41 DE CALCULO INTEGRORUM

I. Emit quis serici ulnas 60, pal. 6, unc. 10, expenditque scuta Romana 292, asses 10, quaeritur quanti steterit una. — Duc ulnas 60 in 8, ut fiant palmi; & adde producto 6, erunt palmi 486. Hos duc in 12, ut fiant uncia, additisque unciis 10, erunt uncia 5842. — Reducantur pariter scuta ad asses, & addantur asses 10, fient asses 29210, Itaque dividatur per *Prop. 6. Cap. 1.* asses 29210 per 5842, quotus est 5: hoc est uncia quaelibet valet assibus 5, proinde uncia 12, seu palmus, valet assibus 60, adeoque palmi 8, sive ulna, valet assibus 480, hoc est scut. 4, assibus 80.

II. Fingamus lunam distare ab aliqua fixa gr. 45; min. 30, sec. 25, quaeritur quanto tempore stellam illam luna assequetur. Ex Tab. Alfonsois luna motu suo diurno conficit gr. 13. min. 10, sec. 35. Proinde dividendi sunt gradus 45, min. 30, sec. 25 per gradus 13, min. 10, sec. 35, ut habeatur appulsus lunae ad fixam.

Primo duc gr. 45 in 60, & producto adde 30, fient minuta 2730. Hæc duc rursus in 60, & adde producto 25, habebis sec. 163825, numerus scilicet dividendus. Eodem pacto invenietur divisor, nempe min. sec. 47435. Tum facta divisiones per *Propos. 6. Cap. 1.* habetur quotus 3, hoc est dies 3, & remanent $\frac{112}{1000}$ partes scilicet unius diei, ex qua fractione eruuntur horæ 10, min. 53 circiter, modo explicando in *Propos. 4. Cap. 3.* Luna igitur ad stellam perveniet diebus 3, horis 10, min. 53.

Examen divisionis fit per multiplicationem.

1113

I

Nam

Nam si in exemplo primo multiplicaveris per *Propos. prac.* ulnas 60, pal. 6, unc. 10 per scut. 4 ass. 80, hoc est uncias 5842 per asses 480, fiet productum 2804160, quod divisum primo per 12, deinde per 8, dabit in quoto scut. 292. 10. Similite in secundo exemplo ducto divisore 47435 in quorum 3, additoque ad productum residuo 21520, restituitur numerus, qui fuit divisus 163825.

CAPUT III.

De Calculo Fractorum.

DEFINITIONES.

Numerus fractus, qui, & fractio, vel *minutia* dicitur; est pars, seu partes alicujus numeri integri in plures æquales partes divisi. Ut si totum aliquid dividatur in tres partes æquales, & ex illis quispiam duas partes obtineat, dicetur habere duas tertias partes, scilicet $\frac{2}{3}$, quæ fractionem efficiunt.

Itaque ad numeros fractos exprimendos duo numeri requiruntur, alter qui scribitur supra lineam, & dicitur *Numerator*, quia numerat partes, quæ de illo toto diviso habentur: alter qui scribitur infra lineam, & dicitur *Denominator*, seu *Nominator*, quia nominat in quales partes illud totum fuerit divisum; nempe tertias, quartas, nonas &c. videlicet.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{11}{10}$ &c.

F 2

Quæ

Quæ fractiones sic pronunciantur, *una dimidia, una tertia, duæ septimæ, quatuor nonæ, undecim vigesima &c.* intelligitur pars, seu partes,

Si numerator æqualis sit denominatori, minutia æqualis est uni integro. Sic $\frac{1}{1}$ æquivalent uni integro in tres partes æquales diviso. Adfunt enim omnes partes illius integri, adeoque $\frac{3}{3}$ sunt 1. Item $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ &c. significant 1. Hinc patet, unitatem esse illud totum divisum in partes tertias, quintas, sextas &c.

Si numerator fuerit denominatore major, tunc minutia erit plus quam unum integrum. Sic $\frac{4}{3}$ plus sunt quam unum integrum in tres partes divisum, sed important 1, & insuper $\frac{1}{3}$. Similiter $\frac{6}{4}$ significant tria integra, & adhuc $\frac{1}{2}$.

II. *Minutia minutia* est pars alterius minutia, ut si fractionis $\frac{1}{2}$ sumatur dimidia pars, nempe $\frac{1}{4}$, erit hæc minutia minutia, quæ a majori distingui solet per interpositam lineam; Sic $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ significat dimidium trium quartarum.

Compendii gratia utemur in posterum signis, quæ sequuntur.

= *Signum æqualitatis*. Sic $a = b$ significat duas quantitates, a & b esse æquales.

+ *Plus*. *Signum additionis*. Ut $a + b$ significat summam duarum quantitarum a , & b . Sic $3 + 5$ significat summam 8, & exprimitur $3 + 5 = 8$.

- *Minus*. *Signum subtractionis*. Ut $a - b$ significat a minus b , hoc est a quantitate a subtractam esse quantitatem b . Sic $5 - 3 = 2$.

x *Signum multiplicationis*. Sic $a \times b$ significat a mul-

a multiplicatum in b , vel per b . Ut $3 \times 5 = 15$.
 $::$: Signum proportionum aequalium. Sic $a : b$
 $: : c : d$ denotat eandem esse proportionem inter
 a & b , quæ est inter c & d . Ut $2 : 4 : : 3 : 6$.
 Item $1 : 3 : : 9 : 27$ &c.

\div Signum proportionis continuæ. Sic $\div a$,
 $b c$, denotat a esse ad b , sicuti ad c . Ut $2, 4, 8$.

A X I O M A T A

I. U Nitas sic habet ad fractionem, ut denomi-
 nator ad numeratorem. Sic $1 : \frac{1}{3} : : 3 : 2$.
 Unitas enim ex dictis est totum divisum, quod
 se habet ad partem, (quæ est fractio) ut fractio-
 nis denominator (qui est totum, quod fuit divi-
 sum) ad sui partem, nempe ad numeratorem.

II. Minutiæ, quarum denominatores habent ad
 suos numeratores eandem rationem, sunt inter se
 æquales, & valent omnino idem. Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$,
 $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{100}{200}$ &c. sunt fractiones æquales, idem-
 que significant. Quod ex primo Axiom., tum
 etiam per se patet. Nam singulæ hæ fractiones
 unius integri medietatem important. Hinc fracto-
 rum valor non ex magnitudine numerorum, qui-
 bus exprimitur, sed æstimari debet ex proportio-
 ne majori, vel minori, quam numerator habet
 ad suum denominatorem; proinde major est $\frac{1}{2}$,
 quam $\frac{1}{10}$, vel $\frac{1}{100}$ &c.

III. Minutia, cujus tam numerator, quam de-
 nominator per eundem numerum multiplicantur,
 aut dividuntur, valorem non mutant. Sic mul-
 tiplicando $\frac{1}{2}$ per 5 oritur $\frac{5}{10}$, quæ idem valet ex
 2. Axiom.

2. *Axiom.* Pariter dividendo $\frac{10}{11}$ per 5, fit $\frac{2}{11}$ ejusdem valoris cum $\frac{10}{11}$. Item divisio $\frac{2}{11}$ per 3, fit $\frac{2}{33}$, quæ idem valet ex 2. *Axiom.*

Schol. Multum interest, ut tyrones hactenus dicta bene intelligant, prius quam ad fractionum regulas addiscendas procedant, alioquin difficilia illis, & valde obscura erunt, quæ sequuntur.

PROPOSITIO I.

Datis duobus numeris, maximam eorum communem mensuram invenire.

Mensura duorum numerorum communis dicitur numerus, qui illos exacte, & sine residuo dividit; seu numerus, qui aliquoties sumptus illos adæquat. Sic 3 dicitur mensura communis numerorum 12 & 21, quia alterum quater, alterum septies sumptus adæquat. Dicitur autem mensura maxima numerus, per quem solum duo numeri reducuntur ad numeros primos, seu minimos.

I. Dati sint duo numeri A & B , quorum mensura communis maxima quæritur. Dividatur major A per minorem B , & neglecto quoto, notetur residuum C : deinde B dividatur per residuum C , tum residuum C per residuum D , & sic deinceps nulla habita exponentium ratione, donec tandem divisor occurrat F , qui præcedentem exacte dividat sine ullo residuo; hic erit maxima communis mensura quæsitæ.

Exempl.

CAP. III. PROP. I.

Exempl. 1.

A	2	3	4
B	1	4	4
C		9	0
D		5	4
E		3	6
F		1	8
			0

Exempl. 2.

4	3	8
1	0	2
	3	0
	1	2
		6
		0

II. Quod si post omnem divisionem remanet 1, signum est, nullam reperiri posse communem mensuram inter numeros datos, eosque esse inter se primos.

Dati sint numeri M & N , divide majorem M per N , & neglecto quoto, nota residuum R , ac sic deinceps proseguere; occurrit demum 1, adeoque numeri dati M & N sunt inter se primi.

Exempl. 1.

M	1	3	4
N		4	9
R		3	6
S		1	3
		1	0
			3
			1

Exempl. 2.

2	7	9
1	4	7
1	2	2
	2	5
		3
		1

Demonstr. per se manifesta est. Nam per continuam illam numeri minoris a majori subtractionem (divisio enim est compendiosa subtractio) devenitur tandem ad partem aliquotam, vel aliquantam numerorum datorum. In primo casu pars illa aliquota erit maxima communis mensura duorum numerorum; in secundo casu evidens est,

nul-

nullum alium numerum, præter unitatem, metiri posse numeros datos, adeoque sunt inter se primi (per Defin. 8.)

Schol. Nota, quemlibet numerum se ipsum semel metiri; proinde dari potest mensura communis maxima inter duos numeros, quorum alter simplex sit, seu primus, & alter compositus. Sic 7 est maxima communis mensura inter 7, & 21. Nam utroque diviso per 7, habetur 1, & 3. Item 5, & 75 divisi per 5, faciunt 1, & 15, adeoque 5 est maxima communis mensura; & sic de aliis.

PROPOSITIO II.

Fractiones ad minimos terminos reducere.

Fraçtio dicitur ad minimos terminos reduci, cum alia illi æqualis, nempe valoris ejusdem minimis tamen terminis expressa reperitur.

I. Data sit fractio $\frac{160}{296}$ ad minimos terminos reducenda, quærat maxima communis mensura inter numeratorem, & denominatorem, per *Propos. præc.* invenietur 8. Per hunc divide tam 160, quam 296, fiet minutia ejusdem valoris, & minimis terminis expressa $\frac{20}{37}$ per *Axiom. 3.*

II. Sit minutia data $\frac{96}{60}$ reducenda ad minimos terminos. Inveniat maxima communis mensura inter 96, & 60, per *Propos. præc.* erit 12, per quem diviso utroque datæ fractionis termino, habetur nova fractio $\frac{8}{5}$ minimis terminis expressa.

Hæc praxis vulgo dicitur *schifare i rotte*.

Demonstratio patet ex 3. *Axiom.*

PRO-

P R O P O S I T I O III.

Fractiones ad idem nomen reducere.

Fractiones reducere ad idem nomen, est efficere, ut fractiones diversorum denominatorum eundem denominatorem acquirant, sed idem valeant, quod prius.

I. Sint duæ fractiones A & B ad commune nomen reducendæ. Ducinter se ad invicem denominatores 5×4 , & 4×5 , erit denominator communis 20. Pro numeratoribus inveniendis multiplica per crucem, seu decussatim, numeratorem unius minutia per denominatorem alterius, hoc est 2×4 , & 3×5 , erunt novi numeratores 8 & 15, qui directe collocandi sunt sub illa minutia, cujus numerator fuit multiplicatus, ut in sequentibus duobus exemplis apparet. Habentur ergo duæ novæ fractiones C & D ejusdem nominis, ut patet, & quidem valoris ejusdem per 3. *Axiom.*

Nam termini fractionis A multiplicantur per eundem numerum, hoc est per 4 denominatorem fractionis B , unde oritur fractio C priori æqualis per *Axiom. cit.* Similiter termini fractionis B multiplicantur per 5 denominatorem fractionis A , & oritur fractio D priori æqualis per idem *Axiom.* ergo fractiones C & D idem valent duæ priores.

$$\begin{array}{r}
 A \quad \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \quad B \\
 \hline
 C \quad \frac{8}{20} \quad \frac{15}{20} \quad D \\
 \hline
 G
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{r}
 \frac{1}{6} \quad \frac{10}{15} \\
 \frac{15}{90} \quad \frac{60}{90}
 \end{array}
 \right.$$

II- Quod

II. Quod si reducendæ sint ad idem nomen plures quam duæ fractiones, ut A, B, C &c. duc omnes denominatores inter se $3 \times 4 \times 5$ fiet F communis denominator 60, qui divisibilis est per singulos denominatores 3, 4, 5, ut patet.

Ad inveniendos itaque novos numeratores, divide communem denominatorem 60 per 3 denominatorem fractionis A , quotus est 20, tertia scilicet denominatoris communis pars, quem duc in numeratorem 2, habebis 40 duas tertias partes ipsius 60, adeoque $\frac{2}{3} = \frac{40}{60}$ per *Axiom.* 2.

Similiter diviso 60 communi denominatore per denominatorem 4 fractionis B , habetur 15 quarta pars ipsius 60. Duc 15 in 3 habebis 45, tres quartas partes ejusdem 60, adeoque $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ per *Ax.* 2. Eadem ratione invenitur $\frac{5}{5} = \frac{60}{60}$. Proinde fractiones datæ A, B, C , æquales sunt fractionibus M, N, R ; quod per se manifestum est.

$$A \quad B \quad C$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{5} = 60 \cdot F$$

$$M \quad N \quad R$$

$$\frac{40}{60} \quad \frac{45}{60} \quad \frac{60}{60}$$

Coroll. Ex hac Propof. innotescit, utra duarum, vel plurium fractionum datarum sit major. Nam si reducantur ad idem nomen, ex majori numeratore apparet, quæ sit major. Sic in superiori exemplo fractio B est ceterarum maxima, quod indicat numerator fractionis N .

Schol.

Schol. Cum denominator unius fractionis exacte dividit denominatorem alterius, tunc duæ illæ fractiones facile reducuntur ad idem nomen, multiplicando per illum quotum terminos fractionis illius, cujus denominator fuit divisor. Sint reducenda ad idem nomen fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{15}$, quia 3 dividit exacte 15, multiplica per quotum 5 terminos fractionis $\frac{1}{15}$, oritur $\frac{5}{15}$ ejusdem nominis cum alia fractione. Quod est valde commodum in calculis Algebraicis, ut in nostris Instit. Analyt. annotavimus.

P R O P O S I T I O IV.

Fractionem ad aliam dati nominis,
& ejusdem valoris revocare.

I. **D**ata sit fractio $\frac{2}{3}$, quæ revocari debeat in aliam, cujus denominator datus sit 60. Duc numeratorem 2 \times 60, & productum 120 divide per denominatorem 3, quotus 40 erit numerator minutia quæsitæ $\frac{40}{60}$. quæ quidem est ejusdem valoris cum minutia data per *Axioma* 2. nam 3. 2:: 60. 40. ut patet.

Data sit fractio $\frac{21520}{47435}$, quæ significet unius diei partes, ut in *Propos. 4. Cap. 2.* reducenda ad horas. Duc 21520 \times 24, & productum divide per denominatorem 47435, quotus dat horas 10, & remanent $\frac{42130}{47435}$ partes unius horæ. Quæ ut ad minuta reducantur, duc 42130 \times 60, & productum divide per eundem denominatorem,

quotus dabit minuta prima 53, & remanent $\frac{17}{1000}$ partes unius minuti primi. Ut invenias secunda duc. 13745 X 60, & dividendo per 47435, quotus dabit min. secunda 17. Luna igitur ad stellam pervenit diebus 3. hor. 10. min. 53. sec. 17.

II. Quod si data fractionis denominator non exacte dividit productum, ut si $\frac{2}{3}$ reduci debeant ad fractum, cujus denominator est 8, productum 16; quod oritur ex 2 X 8, non exacte dividitur per denominatorem 3, nam remanet 1: tunc ponatur quotus 5 supra denominatorem datum 8, eique jungatur fractio orta ex residuo, nempe $\frac{1}{8}$, quæ erit fractionis fractio; & facit hunc sensum, duæ tertiæ in octavas redactæ dant quinque octavas, & unam tertiam unius octavæ, scilicet $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} | \frac{1}{8}$. Quod autem $\frac{2}{3}$ idem valeant ac $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} | \frac{1}{8}$ patet. Nam $\frac{1}{8} | \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ per Propos. 7. hujus; proinde $\frac{2}{3} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} =$ (per Ax. 3.) $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ per Prop. 2. hujus.

Schol. Hinc habetur ratio explorandi valorem minutiarum in partibus earum notioribus; ut si scire velis quid valeant $\frac{2}{3}$ unius scuti Romani in julii, vel assibus. Quia 10 julii, aut asses 100 efficiunt scutum Romanum 1, duc numeratorem 3 in 10, aut in 100, & productum divide per denominatorem 5, erunt in primo casu $\frac{6}{5}$, in secundo $\frac{60}{5}$, hoc est julii sex, aut asses 60. Item dantur $\frac{2}{3}$ unius pedis, scire volo quot pollices hæc fractio importet. Quia 12 pedem 1 efficiunt, duc 3 X 12, & productum 36 divide per 5, quotus datur 5, unde habentur $\frac{2}{3}$ hoc est pollices 5.

Et remanet $\frac{1}{3}$. Quod si iterum supponas pollicem dividi in 12 lineas, facile erit explorare, quid importet una septima pars unius pollicis. Hæc praxis vulgo dicitur valutarum i Rotti.

PROPOSITIO V.

Fractiones ad integra revocare.

I. **C**UM numerator denominatore suo major est, fractio reducitur ad integra, dividendo numeratorem per denominatorem. Sic $\frac{12}{3}$ divisæ per 3 dant integra 4. Item $\frac{60}{12}$ divisæ per 12 dant 5 integra.

II. Quod si denominator non exacte dividit numeratorem, fit ex residuo minutia. Proinde $\frac{12}{3}$ divisæ per 3 dant integra 3 $\frac{1}{3}$. Similiter $\frac{21}{7}$ divisæ per 7 dant 3 $\frac{1}{7}$.

Schol. Hinc habetur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias speciei altioris. Sic asses 350 si dividantur per 100, reducuntur ad scuta Romana 3 $\frac{50}{100}$, seu 3 $\frac{1}{2}$. Pariter minuta 120 divisæ per 60 dant horas 2. Patet divisors istos 100, & 60 esse denominatores minutarum, per quos eorum numeratores dividuntur per hanc Propositionem.



PROPOSITIO VI.

Numerum integrum in minutiam dati nominis reducere.

SIt datus integer v. gr. 3 reducendus in fractum, cujus denominator sit 7. Multiplica integrum ipsum 3 per denominatorem datum 7, & producto subscribe ipsum denominatorem 7, erit fractio quaesita $\frac{21}{7}$. Similiter unitas reducenda fit in fractum, cujus denominator sit 5, erit $\frac{1}{5}$ = 1 ex dictis ad *Definit. I. Cap. hujus.*

Schol. I. Si integro cuilibet supponatur unitas, fit fractio; vel quasi fractio integro aequivalens, ut $\frac{6}{1} = 6$, $\frac{8}{1} = 8$ &c. quod pro multiplicatione, & divisione fractionum auoretur.

Schol. II. Hinc vero oritur praxis reducendi monetas, pondera, ac mensuras in alias inferioris speciei. Sicut scuta Romana 55 reducenda ad asses, multiplica 55 x 100, habebis asses 5500. Item miliaria Romana 50 convertenda sint in passus, quia passus 1000 miliaria 1 efficiunt, duc 50 x 1000, fiunt passus 50000. Patet in his exemplis numeros illos 100, & 1000 esse denominatores datos, per quos multiplicantur numeri integri 55, & 50, ut fiant fractiones $\frac{5500}{100}$, $\frac{50000}{1000}$ juxta hanc Propof.

PROPOSITIO VII.

Fractionem fractionis ad simplicem fractionem reducere.

DUæ, vel plures fractiones fractionum ad unam simplicem fractionem reducuntur hoc pacto. Multiplica singulos numeratores inter se, & singulos pariter denominatores inter se, duo producta minutiam efficiant æqualem omnibus illis minutis minutiarum datis. Sit minutia minutiarum $\frac{1}{4}) \frac{2}{3}$ hoc est una quarta pars duarum tertiarum ad simplicem minutiam reducenda; duc inter se numeratores 1×2 , & denominatores 4×3 , erit nova quæsitæ minutia $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Similiter reducenda sint ad simplicem minutiam minutiarum $\frac{2}{4}) \frac{3}{5}$ multiplicatis inter se $3 \times 2 \times 3$, item $4 \times 3 \times 5$, habetur nova minutia omnibus illis æqualis $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$ per *Prop. 1. hujus*.

Demonst. sensibili aliquo exemplo res manifesta erit. Ponamus hanc ipsam minutiam minutiarum $\frac{2}{4}) \frac{3}{5}$ desumptam fuisse ex uno scuto Romano, quod decem julis constat; dico hanc minutiam minutiarum continere $\frac{3}{10}$ unius scuti, nempe tres julios. Nam $\frac{1}{4}$ unius scuti continent sex julios, cum julii duo sint $\frac{1}{4}$ unius scuti. At $\frac{2}{4}$ sex juliorum sunt quatuor julii, ut patet, & $\frac{3}{5}$ quatuor juliorum sunt tres julii. Ergo evidens est, minutiam minutiarum $\frac{2}{4}) \frac{3}{5}$ continere $\frac{3}{10}$, nempe tres julios.

Id;

Id facile illustrari potest dividendo lineam rectam in partes æquales tres, quatuor &c. Nam si quæratur dimidium unius tertiæ partis ejusdem lineæ, patet illam esse partem sextam totius. Divisis enim bifariam singulis illis tertiis ejus lineæ partibus, erit tota linea divisa in sex partes æquales; proinde $\frac{1}{2}$ unius tertiæ facit $\frac{1}{2}$. Quod erat &c.

Hæc regula apud vulgares Arithmeticos audit *insilzare i Rosri*.

PROPOSITIO VIII.

Fractiones addere:

I. **S**I fractiones addendæ sint ejusdem nominis, adde simul omnes numeratores, eorumque aggregato denominatorem subscribe. Sint addendæ $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{7}$; additis numeratoribus $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, fit fractionum summa $\frac{12}{7} = 2$ per *Prop. 5.* hujus.

II. Si fractiones addendæ sint diversi nominis, reduc ad idem nomen per *Prop. 3.* & operare, ut dictum est.

III. Quod si addendi sunt integri cum fractis, adde seorsim integros, & seorsim fractos; ut si ad $4 \frac{1}{2}$ addendi sint $3 \frac{1}{2}$ fiet summa $7 \frac{1}{2}$. Res per se patet.



P R O P O S I T I O IX.

Fractiones subtrahere.

I. **S**I minutia sunt ejusdem nominis, minor earum ex majori subducitur, & residuo subscribitur communis denominator. Sic $\frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$.
Item $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$.

II. Si diversi sint nominis, reducantur ad idem nomen per *Prop. 3.*, & operatio fit ut antea.

III. Si ab integris subtrahenda sit aliqua fractio, reducantur integra ad fractionem ejusdem nominis cum data fractione per *Propos. 6.*, & cetera fiant, ut supra. Subtrahere oporteat $\frac{1}{4}$ ex 4; reduc 4 ad tertias, erunt $\frac{12}{3}$. Deinde $\frac{12}{3} - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ per *Propos. 5.* Similiter subtrahenda sint $2\frac{1}{4}$ ex $5\frac{1}{4}$, hoc est $\frac{4}{4}$ ex $\frac{12}{4}$: reduc ad idem nomen has duas fractiones per *Propos. 3.* erunt $\frac{12}{4}$, & $\frac{1}{4}$, adeoque $\frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$, per *Propos. 5.*

Schol. *Ut minutia addi, vel subtrahi possint, semper idem nomen habere debent, quod notetur.*

P R O P O S I T I O X.

Fractiones multiplicare.

I. **S**I multiplicanda est fractio per fractionem, duc inter se numeratores, itemque denominatores inter, res erit confecta. Multiplicanda sit fractio $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ ductis 2×3 , & 3×4 , habetur

H

betur

betur productum quaesitum $\frac{4}{11}$. Sic $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
 $= \frac{2}{3}$ per *Propos. 2.*

II. Quod si multiplicandus sit integer per fractum, vel fractus per integrum, semper integro suppone unitatem, ut fiat quasi fractio; deinde operare ut supra. Sit multiplicanda $\frac{2}{3} \times 7$, supposita integro unitate, erit $\frac{2}{3} \times \frac{7}{1}$, proinde productum $\frac{14}{3}$.

III. Si vero alter multiplicantium sit integer cum fracto, reducatur totus ad fractum, multiplicando illum per denominatorem ejusdem fracti; ut si multiplicari oporteat $2 \frac{1}{3}$ per $\frac{4}{5}$, fiat $\frac{14}{3} \times \frac{4}{5}$; erit productum $\frac{56}{15}$. Similiter si uterque multiplicator sit integer cum fracto, uterque reducitur ad fractum ejusdem nominis cum minutia sibi adhaerente: ut sint multiplicanda $3 \frac{1}{2} \times 5 \frac{1}{3}$, reducantur ad fractos, erunt $\frac{7}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{112}{6} = 16 \frac{2}{3}$ per *Propos. 5.*

Demonstr. Ex regula tradita multiplicare fractum A per fractum B est producere fractum C , qui toties contineatur in fracto B , quoties fractus A continetur in unitate. Nam sicuti fractus C continetur bis in fracto B , ita fractus A bis continetur in unitate, ut patet; ergo ex definitione multiplicationis fractos C est productum fracti A multiplicati per fractum B .

$$A \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} B \frac{1}{10} C$$

Coroll. Hinc patet ratio, quare in minutiis productum multiplicationis C sit minus, quam factores A & B . Nam cum unitas sit ad A ,

ut

ut

ut

ut *B* ad *C* ex *Defin.* multiplicationis per *Prop.* 5 *Cap.* 1.; & unitas major sit quam *A*, etiam *B* major erit quam *C*, proinde *C* minor.

Schol. I. *Multiplicatio fractionum fit etiam eleganter per divisionem, dividendo scilicet denominatorem unius per numeratorem alterius minutia (modo divisibiles sint sine residuo); Sint enim multiplicanda $\frac{2}{3} \times \frac{2}{10}$, divide 9 per 3, & 10 per 2, fit $\frac{2}{3}$ productum quæsitum. Idem enim producitur, ac si more consueto multiplicentur. Nam $\frac{2}{3} \times \frac{2}{10} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ per *Prop.* 2.*

Schol. II. *Si integrum cum minutia ducendum sit in integrum, quod exacte divisibile sit per denominatorem minutia, ut si ducendum sit $38 \frac{2}{3} \times 18$, practici primo resolvunt integrum in fractum, fitque 116, deinde diviso 18 per denominatorem 3, habetur quotus 6, per quem multiplicant ipsum 116, & habetur productum quæsitum 696. Ratio per se patet.*

Schol. III. *Si vero integrum ducendum sit in minutiam, ut $32000 \times \frac{4}{5}$, practici prius dividunt 32000 per 5, deinde quorum 6400 ducunt in 6.*

PROPOSITIO XI.

Fractiones dividere.

I. **S**I termini divisoris exacte dividant terminos dividendi, fractus, qui inde oritur, erit quotus. Ut si dividenda sit minutia $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$, di-

H 2

visis

visis 4 per 2, & 9 per 3, quotus erit $\frac{3}{2}$. Similiter si denominator sit communis, satis erit dividere numeratorem per numeratorem, deleto denominatore; sic dividendo $\frac{4}{3}$ per $\frac{2}{3}$, quotus erit 3; & dividendo $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{3}$, quotus erit $2\frac{1}{3}$. Item dividendo $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$, deleto communi denominatore, quotus erit $\frac{2}{2}$.

II. Quod si termini divisoris non exacte dividant terminos dividendi, aut denominator non sit communis, tunc inverte divisorem, ita ut denominator ponatur loco numeratoris, numerator vero loco denominatoris, deinde duc tam numeratores inter se, quam denominatores inter se, productum erit quotus quæsitus. Dividenda sit minutia $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$, inverso divisore, erit $\frac{2}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$ quotus quæsitus. Ita si dividere oporteat $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{4}$, hoc est, si dicatur, $\frac{1}{4}$ unius scuti Romani dat $\frac{2}{3}$ unius ulnæ, quot ulnas dabit scutum unum, divisus [inverso divisore] $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{1}$, quotus dat ulnas $2\frac{2}{3}$. Nam $\frac{2}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ per *Prop. 5. bujus.*

III. Quoties occurrit fractus dividendus per integrum, satis est multiplicare denominatorem fracti per ipsum integrum. Sit dividendus $\frac{1}{5}$ per 2, duc 5×2 , quotus erit $\frac{1}{10}$. Item $\frac{1}{5}$ divisus per 5, dat quotum $\frac{1}{25}$. Nam semper integro supponitur unitas.

IV. Cum divisor, aut dividendus, vel uterque est integer cum minutia, reducendus est integer ad minutiam sibi adjunctam; ut fiat unica minutia, & operatio instituenda est, ut supra. Sint dividenda $24\frac{1}{3}$ per $\frac{2}{3}$, fient $12\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{36}{2} = 36$

$= 36 \frac{1}{10}$ per *Propos.* 5. Similiter sint dividenda $15 \frac{1}{3}$ per $12 \frac{1}{2}$, fiunt $\frac{46}{3} \times \frac{1}{25} = \frac{23}{75} = 1 \frac{17}{75}$.

Demonstr. Dividere fractum A per fractum B est invenire quotum C , ad quem ita sit unitas, sicuti divisor B ad dividendum A ex divisionis definitione ad *Prop.* 6. *Cap.* 1. Sed unitas est ad fractum C , ut divisor B ad dividendum A . Unitas enim est ad C , ut denominator 3 ad numeratorem 4 ex *Axiom.* 1. Fractus autem B est ad fractum A , ut 3 ad 4: nam redactis ad idem nomen A & B per *Prop.* 3. oriuntur fracti æquales M & N , qui ob communem denominatorem se habent ut 3 ad 4; ergo unitas est ad C , ut B ad A , proinde C est quotus quæsitus. Quod &c.

Axiom. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

$$\begin{array}{ccc} B & A & C \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} M & N & 1. \frac{4}{3} :: 3.4 \\ \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{3} \end{array}$$

Coroll. Hinc patet ratio, cur in divisione minutiarum quotus sit major numero ipso, qui dividitur; quod quidem accidit, cum divisor minor est unitate. Nam cum divisor sit ad dividendum, ut unitas ad quotum, erit permutando divisor ad unitatem, ut dividendus ad quotum, adeoque si divisor minor est unitate, etiam dividendus debet esse minor quoto.

Schol. I. Ubi occurrit integer magnus cum fracto dividendus per integrum, ut $634 \frac{1}{2}$ per 5, pra-

practici dividunt integrum per integrum, nempe 634 per 5, nulla habita ratione fractionis, ut inveniant quorum 126. Tum si quid remanet (ut hic 4) illud reducunt ad fractionem per Prop. 6., hoc est ad $\frac{4}{5}$, quam addunt ad fractum $\frac{2}{5}$; fitque summa $\frac{126}{5}$ per Prop. 8., quæ quidem summa divisa per 5 dat quotum $\frac{126}{25}$ per hanc Propof. n. 3., unde quotus quaesitus est 126 $\frac{4}{25}$.

C A P U T IV.

De fractionibus Decimalibus.

D E F I N I T I O I.

FRactiones Decimales sunt illæ, quarum denominatores in ratione decupla ab unitate incipiente progrediuntur, nempe 1. 10. 100. 1000. 10000. &c.

Supponatur mensura aliqua, ut pes, virga, libra, vel recta linea divisa in decem æquales partes, singulæ deinde hæ partes in alias decem partes, atque hæ singulæ rursus in alias decem, & sic deinceps, quantum quisque velit; oriuntur ex hac divisione partes decimæ, centesimæ, millesimæ, centesimæ millesimæ &c. quæ vocantur etiam *primæ, secundæ, tertie, quarta &c.* iisque distinguendis apponuntur virgulæ, integris autem

cyphra 0. Sic fractio decimalis, $5.8\overset{\circ}{6}4\overset{\text{I}}{2}\overset{\text{II}}{4}\overset{\text{III}}{2}\overset{\text{IV}}{4}$ signi-

gnificat quinque integra, octo primas, sex secundas, quatuor tertias, duas quartas. Sed satis est virgulam ultimam apponere, & integra pun-

cto distinguere, ut 5. 8 6 4 2.^{IV} Quæ quidem fractio idem valet ac $5 + \frac{8}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000}$, seu $\frac{50642}{10000}$, At commodi gratia decimales scribuntur istar integrorum, omisso denominatore, modo su-

pra explicato, nempe 5. 8 6 4 2.^{IV}

Coroll. I. Hinc sequitur virgulas illas, sive apices decimales, qui numeris apponuntur, esse

loco denominatorum; ut in decimali 5. 8 6 4,^{I II III} apex unus importat denominatorem 10, duo apices denominatorem 100, tres denominatorem 1000 &c. hoc est $\frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{4}{1000}$.

Coroll. II. Itaque decimales ad eandem denominationem facile reducuntur, addendo tot zeros virgulis decimalibus affectos, quot opus fuerit; ut

si decimalis 3. 5 reducenda sit ad secundas, ad tertias, vel quartas &c. scribitur 3. 50, 3. 500,

3. 5000.^{IV} Valor enim non mutatur, nam $5 = 50, 5 = 50$ &c. ut julii quinque sunt asses 50,

Coroll. III. Si integro cyphræ quocunque cum
vir.

virgulis addantur, ejus valor idem manet; ut si

ad 3 addas 000 , ut fiat 3.000 , non mutatur integri valor. Significat enim, ut prius, tres unitates, non autem unitates 3000; nam $\frac{3000}{1000} = 3$.

Schol. Ubi nullum precedit integrum, ut in decimalibus $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$, $\frac{725}{1000}$ tunc loco integri ponitur zero, nempe 0.8, 0.24, 0.725, quæ æquivalent præcedentibus $\frac{8}{10}$, $\frac{24}{100}$ &c.

DEFINITIO II.

FRactionum decimalium notæ dicuntur esse ejusdem ordinis, seu gradus, quarum iidem sunt denominatores, vel iidem apices. Sic in decimalibus 0.5679, & 0.045, notæ 6 & 4, item 7 & 5 dicuntur ejusdem gradus, quia utrique respondet idem denominator, scilicet $\frac{1}{100}$ & $\frac{1}{100}$, item $\frac{7}{1000}$ & $\frac{5}{1000}$. Nam utrique respondet idem apex, qui stat loco denominatoris *per Coroll. I.*

DEFINITIO III.

Progressio decimalis interrupta dicitur, cum habentur v.g. partes millesimæ, sed partes

decimæ, aut centesimæ nullæ sunt; ut 4.25, ubi partes centesimæ, & millesimæ desunt, quæ quidem cyphris interpositis suppletur: sic eadem

decimalis, interpositis duabus cyphris, erit 4.2005.

Simi

Similiter 3.57 , fiet 3.05007 . Eadem ratione
 $\frac{5}{1000}$ scribitur 0.005 , & $3 + \frac{45}{1000}$ scribitur
 3.0045 . Semper enim valor est idem, ut in
Coroll. 2. & *3.* fuit explicatum.

P R O P O S I T I O I.

Decimales addere, & subtrahere.

Fractiones decimales addendæ, vel subtrahendæ sic disponantur; ut notæ decimales ejusdem gradus sibi mutuo respondeant per *Defin. 2.*; & si progressio sit interrupta, ut in secundo exemplo sequenti, suppleantur loca vacua per *Defin. 3.*: deinde additio & subtractio fiat, ut in *Prop. 2.* & *4.* *Cap. 1.*

Additionis exempla.

$\begin{array}{r} A \quad 3.245 \\ B \quad 7.39 \\ \hline C \quad 10.635 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5.27 = 5.207 \\ 6.45 = 6.45 \\ \hline \text{Summa } 11.657 \end{array}$
---	---

Ratio horum patet ex dictis: nam si decimales *A* & *B* fiant ejusdem denominationis per *Coroll. 2.* erunt per *Cor. 1.* $A = \frac{3245}{1000}$ & $B = \frac{7390}{1000}$

proinde $A + B = \frac{325}{1000} + \frac{7390}{1000} = \frac{10615}{1000} = C 10.$

635 per *Defn.1.*

Subtractionis exempla.

$\begin{array}{r} A \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 2 \\ \\ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 7.42 = 7.402 \\ 35 = 0.035 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} B \quad 1.29 \\ \hline \end{array}$	$\text{differentia } 7.367$
$\begin{array}{r} C \quad 3.282 \\ \hline \end{array}$	

Ratio plane est eadem ac additionis: nam si decimales A & B ad eandem denominationem reducantur per *Cor.2.* erunt per *Cor.1.* $A = \frac{4572}{1000}$ & $B = \frac{3290}{1000}$ hinc $A - B = \frac{4572}{1000} - \frac{3290}{1000} = \frac{1282}{1000} = C.3.282.$ per *Defn.1.*

Schol. *Ut ex integris decimales subtrahi possint, addantur integro tot zeri, quot sunt apices decimales subtrahendæ. Sic ad subtrahendum ex 8 integris tres centesimas, hoc est 0.03, adduntur ad 8 duo zeri, ut fiat 8.00, erisque residuum 7.97, ut patet.*

PROPOSITIO II.

Decimales multiplicare.

FRactiones decimales multiplicantur ut integra per *Prop. 5. Cap. 1.*, nulla habita ratione virgularum decimalium. Sed ad distinguendas in producto partes decimales ab integris, adduntur simul apices utriusque factoris; summa enim dat numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in producto, incipiendo a dextera finistram versus.

Exempla.

$\begin{array}{r} \text{I. } 4 \overset{\text{II}}{0} \overset{\text{II}}{5} \\ \underline{3 \overset{\text{I}}{.} 2} \\ 8 \text{ I } 0 \\ \text{I } 2 \text{ I } 5 \\ \hline \text{I } 2 \overset{\text{III}}{.} 9 \overset{\text{III}}{6} 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{II. } 0 \overset{\text{III}}{.} 7 \overset{\text{III}}{4} \overset{\text{III}}{5} \\ \underline{4 \overset{\text{II}}{.} 2} \\ \text{I } 4 \text{ 9 } 0 \\ 2 \text{ 9 } 8 0 \\ \hline 0 \overset{\text{V}}{.} 3 \text{ I } 2 \text{ 9 } 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{III. } 0 \overset{\text{IV}}{.} 0 \overset{\text{IV}}{0} \overset{\text{IV}}{0} \overset{\text{IV}}{3} \overset{\text{IV}}{5} \overset{\text{IV}}{6} \\ \underline{0 \overset{\text{IV}}{.} 0 \overset{\text{IV}}{0} \overset{\text{IV}}{4} \overset{\text{IV}}{8}} \\ \text{2 } 8 \text{ 4 } 8 \\ \text{I } 4 \text{ 2 } 4 \\ \hline 0 \overset{\text{X}}{.} 0 \overset{\text{X}}{0} \overset{\text{X}}{0} \overset{\text{X}}{0} \overset{\text{X}}{0} \overset{\text{X}}{1} 7 \overset{\text{X}}{0} \overset{\text{X}}{8} \overset{\text{X}}{8} \end{array}$
--	--	--

Operandi modus ex dictis facile demonstratur. Nam in primo exemplo $4 \overset{\text{II}}{0} \overset{\text{II}}{5} = \frac{405}{100}$ & $3 \overset{\text{I}}{.} 2 = \frac{32}{10}$ per *Defin. 1.* Est autem per *Proposit. 10. Cap. 3.* $3 \overset{\text{II}}{.} \frac{32}{10} \times \frac{405}{100} = \frac{32 \times 405}{1000} = 12 \overset{\text{III}}{.} 960$ per

per *Defn. 1.* & *Coroll. 1.* quod est ejusdem exempli primi productum.

Ex eodem primo exemplo manifestum est, tres tantum notas decimales in facto abscindi, quia ex factoribus habentur apices tres. In reliquis exemplis quia factores plures apices continent, quam productum notas, ideo ad complendum numerum apicum æqualem, tot adduntur ad sinistram zeri, quot defunt in facto notæ decimales; unus præterea zerus additur cum puncto ad locum integrorum indicandum.

Schol. I. Quod si in alterutro factore progressio decimalis sit interrupta; ut si multiplicari

oporteat $4\overset{I}{5}$ per $3.\overset{II}{2}$, primo progressio interpositis zeri fiat integra per *Defn. 3.*, hoc est fiat

$4\overset{I}{5} = 40\overset{III}{5}$, & $3.\overset{II}{2} = 3.\overset{II}{0}2$, deinde multiplicando $40\overset{III}{5} \times 3.\overset{II}{0}2$ habetur productum 1.22310 .

Schol. II. Si factorum unus sit numerus integer sine ullo decimali, in producto numerantur tot notæ, quot apices continet alterius factoris ultima

nota dextrorsus. Sic $3 \times 4.\overset{II}{2}5 = 12.\overset{II}{7}5$.

PROPOSITIO III.

Decimales dividere.

Fiat divisio, ut in integris fieri solet per *Propos. 6. Cap. 1.*; utque notæ decimales in quo distinguantur, subtrahe numerum apicum, quos ha-

habet divisor, a numero apicum, quos habet dividendum; residuum dabit numerum notarum decimalium, quæ numerari debent in quoto a dextera sinistram versus. Si quoti figuræ pauciores sint, addantur cyphræ, ut in tertio exemplo.

Exempla.

$$\text{I. } \begin{array}{r} \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{V} \qquad \qquad \qquad \text{III} \\ 3) \quad 0.13563 \quad 1 \quad 4.521 \end{array}$$

$$\text{II. } \begin{array}{r} \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{I} \\ 5.24) \quad 18.864 \quad 1 \quad 3.6 \\ \quad \quad \quad 3.144 \\ \quad \quad \quad -00 \end{array}$$

$$\text{III. } \begin{array}{r} \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{V} \\ 27.589) 0.354 \dots 1 \quad 0.01283 \\ \quad \quad \quad 27589 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 78110 \\ \quad \quad \quad 55178 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 86080 \\ \quad \quad \quad 82767 \end{array}$$

3313 &c.

Operandi ratio clara est. Nam in primo exemplo per *Defn. 1.* habetur $3 \frac{100}{3} \frac{100}{3} \&c.$

o. $13563 = \frac{13563}{100000}$, proinde dividendo numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem ac si essent numeri integri, habe-

tur nova fractio $\frac{13563}{100000} = 4.521$ per Defin. I. nempe quotus in primo exemplo inventus.

Schol. Quod si divisoris, aut dividendi decimalis progressio interrupta sit, fiat integra per Defin. 3. deinde instituaturs divisio, ut supra dictum est.

PROPOSITIO IV.

Integrum, vel fractum in partes decimales reducere.

I. **E**sto reducendus in Partes v.g. decimas numerus 6. Ducatur 6 in 10, & producto subscribatur denominator 10, erit $\frac{6}{10}$, seu 60 per Defin. I. Similiter 28 ad centesimas reductus erit $\frac{2800}{10000}$, seu 28. 00.

II. Reducenda sit fractio ex. gr. $\frac{1}{5}$ in partes millesimas, & ducatur numerator 3 in 1000, & productum dividatur per denominatorem 5, erit $\frac{600}{1000} = 0.600$, unde apparet $\frac{1}{5} = \frac{600}{1000} = 0.600$ per Defin. I.

Simi-

Similiter fractio $\frac{1}{2}$ reducenda fit in partes centesimas millesimas, hoc est in 10000. Operandum ut supra, & inveniatur $\frac{1}{2} > 0.42857$, sed > 0.42857 , defectu existente minori quam $\frac{1}{10000}$. Est enim fractio decimalis approximans, quæ non exprimit rationem nisi prope veram, ut Cl. Wolfius advertit.

Schol. Hæc propositio maximum habet usum, tum in divisionibus, in quibus habetur residuum alicujus momenti, tum etiam in extractione radicum. Nam in utroque casu ex hac propositione haberi potest fractio decimalis magis magisque approximans, quæ exprimat rationem prope veram quoti, sive radici quæsitæ. Ratio autem operationis habetur ex regula proportionum, de qua inferius. Nam in secundo exemplo est $5.3 : 1000.600$, & sic de aliis.

PROPOSITIO V.

Decimales particulas ad fractionem datæ denominationis reducere.

QUæritur quot unicas unius pedis Romani confluant particulae decimales ^{III} 750. Quia pes Romanus dividitur in uncias 12, hinc patet, particulas decimales convertendas esse in partes duodecimas. Sunt autem per *Defin.* 1. particulae

^{III} $750 = \frac{1}{16}$. Ducantur igitur particulae decimales

les 750 in 12, & productum dividitur per 1000. erit $\frac{750}{1000} = 9$; habentur ergo $\frac{9}{10}$, proinde

III

$750 = \frac{9}{10} = \frac{1}{4}$. Igitur particulæ datæ conficiunt novem uncias, seu $\frac{1}{4}$ unius pedis Romani.

Similiter scire volo, quot asses, seu quot partes scuti Romani, quod in asses 100 dividitur,

IV

contineant decimales particulæ 5610. Cum per

IV

Defn. 1. sint $5610 = \frac{5610}{10000}$, si ducantur 5610 in 200, & productum dividatur per 1000, erit $\frac{5610 \cdot 200}{10000} = 67 + \frac{1}{10}$. Continent ergo asses 67 $+$ $\frac{1}{10}$, hoc est asses 56, & unius quadrantis Romani semissem. Ratio innititur regulæ proportionum, de qua inferius.

Schol. I. *Simon Stevinus, decimalium autor ingeniosissimus, eas loco fractionem vulgarem adhibendas proposuit, summo quidem calculi commodo, cum decimales tractentur sine molestia, non secus ac integri essent numeri, ut vidimus. At recentiores Mathematici Tacquetus, Praetorius, Reyneau, Wolfius, & alii hoc præclarum inventum illustrarunt, additis quoque demonstrationibus, quæ in auctore desiderabatur.*

Schol. II. *Ceterum fractiones decimales in omni fere Mathesi magni sunt usus, maxime vero in approximatione radicum in Algebra. Proinde Analyticis nostris Institutionibus hæc ipsa de calculo Decimali notitia fuit tanquam appendix adjecta.*

CAPUT V.

De extractione Radicum.

SI numerus quicumque ducatur in se ipsum, ut 3×3 producitur 9, qui dicitur numerus quadratus, propter analogiam, quam dicitur ad quadratum Geometricum. Item si ducas 4×4 oritur 16 pariter quadratus. Illi vero numeri 3 & 4, ex quibus in se ductis planum illud, seu quadratum oritur, dicuntur *latus* quadrati, seu *radix*, & exprimuntur hoc signo $\sqrt{\quad}$, quod signum *radicale* vocant.

Si radix 3 multiplicet quadratum 9, vel 4 multiplicet 16, tunc producitur 27, vel 64, qui dicuntur *cubi*; quia repræsentant corpus æqualiter longum, latum, & profundum, quod a Geometris denominatur *cubus*, & numeri illi 3 & 4, dicuntur *radix*, seu *latus* cuborum 27, & 64.

Quod si cubus ipse per suam radicem multiplicetur, ut 27×3 , oritur *quadrato-quadratus* 81. Si iterum 81×3 , oritur *quadrato-cubus*, & sic deinceps. Hæc producta recentiores Mathematici vocant *dignitates*, seu *potestates*; nempe vocant radicem dignitatem, seu potestatem *primam*; quadratum *secundam*, cubum *tertiam*, quadrato-quadratum *quartam*, quadrato-cubum *quintam* &c. quas etiam literis sic exprimunt, a^1 , a^2 , a^3 , a^4 , a^5 &c.

DEFINITIO.

EXtractio igitur radice quadratæ, vel cubicæ &c. (seu secundæ, tertię, vel quartæ potestatis &c.) est inventio illius numeri, qui semel, bis, ter, vel pluries in se ductus illam potestatem genuit, adeoque ab ipsa potestate denominatur radix secunda, tertia, quarta &c.

Si numerus datus centenarium non excedit, & fit quadratus, ejus radix habetur ex tabella, quæ sequitur; ut si quæratür radix quadrati 64, ejus radix invenitur 8. Quod si numerus non fit quadratus, ut ex. gr. 50, sumenda est ex eadem tabella radix proxime minor, hoc est 7, quæ in se ducta producit 49, quadratum maximum contentum in dato numero 50.

1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Schol. I. *Nota, quadratum majus superare quadratum proxime minus duplo radice quadrati minoris plus unitate. Sic 16 majus est quadrato 9 duplo radice 3 + 1, hoc est 7. Item 36 superat 25 duplo radice 5 + 1, nempe 11.*

Schol. II. *Similiter cubus major ex. gr. 64 superat cubum proxime minorem 27 triplo radice cubi minoris ducto in radicem majoris cubi plus unitate; nempe $9 \times 4 + 1 = 37$, & sic de aliis.*

PRO-

PROPOSITIO I.

Ex dato numero radicem quadratam, seu secundam extrahere.

SIt numerus *A*, ex quo radix secunda extrahenda fit.

$$\begin{array}{r}
 A \quad 186624 \quad \left(\begin{array}{l} B \\ 432 \end{array} \right. \\
 \quad \quad \quad 16 \\
 \hline
 C \quad 83) \quad - 266 \\
 \quad \quad \quad 249 \\
 \hline
 D \quad 862) \quad - 1724 \\
 \quad \quad \quad 1724 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0000
 \end{array}$$

1. Sub ultima figura ad dexteram notetur punctum, deinde sub antepenultima, & sic deinceps, ut totus numerus distribuatur in membra [ut hic tria] quæ continebunt binas figuras, excepto ultimo ad sinistram, si numerus figurarum sit impar, quod unam habebit. Quot erunt membra, tot figuris radix quæsitâ constabit.

2. Quære ex tabula superiori radicem primi membri ad sinistram, nempe 18, hoc est radicem proxime minorem, scilicet 4, quam pone dextrorsum post lineam, ut in *B*.

3. Duc radicem 4 in se ipsam, & quadratum

K 2

16

16 pone sub ipso membro 18, ex quo subtrahatur; tum residuo 2 [quod notatur infra lineam] adde sequentes duas figuras 66, quæ simul faciunt 266.

4. Radicem ipsam 4 duplica, fit 8, quem pone in *D* pro divisione numeri 26 [excluditur enim semper a divisione figura notata puncto] & quotum inventum 3 appone tum radici in *B*, tum divisori in *C*, unde fit 83.

5. Per radicem modo inventam 3 multiplica omnes numeros in *C* positos, & productum 249 subscribe numero 266; a quo facta subtractione, remanent 17.

6. Adde huic residuo sequentes duas figuras 24, fient 1724; eandemque operationem rursus institue: nimirum duplica totam radicem *B*, habebis 86, quem pone in *D* pro divisore numeri 172 [exclusa figura ultima] quotus erit 2, quem appone tum radici in *B*, tum divisori in *D*, & per ipsam radicem 2 multiplica numeros omnes in *D* 862. Deinde productum 1724 subscribe ipsi numero 1724, a quo debet subtrahi; cumque nihil remaneat, signum est, datum numerum esse vere quadratum.

Sic aliud exemplum. Extrahenda est radix quadrata ex dato numero *M* 6015625.

1. Dividatur in membra per puncta, incipiendo dextrorsum modo jam explicato. Sunt quatuor membra, quorum primum ad sinistram continet unam figuram nempe 6. Hujus radix proxime minor est 2, quam pone in *N* dextrorsus, ejusque quadratum subtrahæ ex primo membro 6, remanent

78 DE EXTRACTIONE RADICUM

plum 48, quod ponitur sinistrorsum in \mathcal{Q} , dividenda sunt 225 (relicta ultima figura) quorū 5 est nova radice figura, quæ ponitur in N , tum etiam in \mathcal{Q} , & per ipsam multiplicando omnes figuras in \mathcal{Q} existentes, habetur productum 2425 subtrahendum ex 2556, factaque subtractione, habetur residuum 131. Cui adde ultimas duas figuras 25, & operare ut supra, invenes ultimam radice figuram 2, quam pone in N & S , ac cetera proficere, ut sæpius dictum est.

Est igitur radix quæsitæ N 2452, & remanent 3321, adeoque numerus datus non est revera quadratus.

Corol. Hinc patet, radicem inventam per divisionem unitate esse minuendam, si productum, quod fit ex multiplicatione, majus sit numero, a quo subtrahi debet; ut in secunda figura radice inventæ factum est: quod quidem notetur.

Schol. I. *Quando divisor non continetur in aliquo membro dividendo, apponitur in radice cyphra, seu zero, ut si extrahenda sit radix quadrata ex 4714. Quia sublato ex primo membro 37 quadrato 36 radice inventæ 6, remanet 1, cui si addatur sequens figura 1 fit 11. (nam figura puncto notata excluditur a dividendo ex dictis) qui numerus dividi nequit per duplum radice 6, nempe 12; in hoc casu ponitur in radice cyphræ 0, eritque radix 60, & habetur residuum 144, cui adduntur statim (si sint) aliæ duæ figuræ dati numeri.*

Schol. II. *Si numerus datus non est quadratus, sed remanet residuum, ut in allato exemplo resi-*
duum

duum 114; tunc fit ex residuo fractio, in qua residuum ipsum ponitur pro numeratore, pro denominatore autem duplum radice inventæ. Si vero residuum sit majus ipsa radice, tunc duplo radice inventæ additur unitas. Sic in eodem exemplo, quia residuum 144 majus est tota radice 60, addita unitate ad duplum ipsius radice, erit fractio $\frac{144}{120}$, ac tota radix $60 + \frac{144}{120}$; ex Sch. 1. pag. 74.

Schol. III. Nullus numerus erit quadratus, qui habeat ad dexteram figuram ultimam 2, vel 3, vel 7, vel 8, vel cyphram unam; sed necesse est, ut sit una ex bis 1, 4, 5, 6, 90, 00, quibus constant numeri simplices quadrati.

Schol. VI. Extractio radice quadratæ non est aliud nisi quædam divisionis species, ut ex ipsa operatione manifestum est; hoc tamen discrimine, quod in divisione communi divisor est numerus datus, in hac vero debet inquiri divisor, & quidem per plures partes, quæ sunt ipsa radix. Proinde multiplicando radicem per se ipsam, v. g. in primo exemplo 432×432 , restituitur numerus quadratus 186624, ut fieri solet in divisione communi, ducendo quotum per divisorem. Et hac ratione habetur examen, multiplicando scilicet per se ipsam radicem inventam, & addendo residuum, si forte sit.

Demonstr. pendet a Prop. 4. lib. 2. Eucl. Nam numerus quadratus 186624, qui producitur ex 432×432 , continet primo quadrata partium 4, 3, 2. Secundo, bis rectangulum 4×3 . Tertio. bis rectangulum ex 43×2 , seu rectangulum ex duplo ipsius 43, nempe 86×2 ; quod patet ad oculum, nempe.

$$\begin{array}{r}
 16 \dots \\
 12 \dots \\
 12,9 \dots \\
 \quad 86. \\
 \quad \quad 86,4 \\
 \hline
 186624
 \end{array}$$

Ex speciosa tamen id longe clarius apparet, si loco numerorum 4, 3, 2, sumantur literæ $a + b + c$; ut in nostris *Instit. Analyt.*

PROPOSITIO II.

Radicem quadratam per approximationem inquirere.

EXtracta radice quadrata, si quid remanet, signum est, talem numerum non esse revera quadratum, neque habere radicem rationalem, quæ numeris exprimi possit. Quanvis autem vera radix sit impossibilis, potest tamen per fractiones decimales ad veram radicem magis magisque approximari, ita ut excessus, vel defectus a vera radice sit minimus: En praxis.

Adde numero, qui remanet post extractionem radice, vel numero ipsi, a quo extracta fuit radix, tot cyphrarum paria, quot volueris, nempe 00, seu 0000, 000000 &c. & ex numero residuo una cum prædictis cyphris extrahe radicem
secun-

secundam, ut minoris est. Aufer deinde ex radice tot figuras [a dextera incipiendo] quot fuerunt paria cyphrarum additarum. Reliquæ figuræ radicis exhibebunt radicem una cum minutia, cujus numerator erunt figuræ ablata, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot paria fuerunt addita.

Sit exemplum. Extrahenda est radix ex numero 12, patet radicem esse 3, & remanere 3. Adde ipsi 12 tria cyphrarum paria, erit 12000000. Extracta ex hoc numero secunda radice per Propof. 1. hujus invenitur 3464, ex qua ablatis ad dexteram tribus figuris, ob tria cyphrarum paria addita, erit radix $3\frac{44}{1000}$ vera quidem minor, sed propinquior, & extractior, quam radix primo inventa.

Schol. I. Si numero, ex quo radix secunda extrahitur, minutia adhaereat, reducitur minutia in partes centesimas, & extrahitur radix. Extrahenda sit radix ex $6\frac{1}{2}$, reduc fractionem in centesimas per Prop. 4. Cap. 3. erit fractio $\frac{25}{100}$, cui adde 6, fit $\frac{625}{100}$, cujus radix quadrata erit $2\frac{5}{10}$.

Schol. II. Quod si denominator minutiae, quæ integro adhaeret, sit numerus quadratus, poterit numerus integer ad unam cum ipso minutiam reduci, & inde extrahi radix. Sic in superiori exemplo $6\frac{1}{2}$ fiet $\frac{25}{2}$, extractaque seorsim tum ex denominatore, tum ex numeratore radice, habetur $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$, ut antea. Unde patet modus extrahendi radicem quadratam ex meris fractionibus, quæ numeris quadratis constant.

82 DE EXTRACTIONE RADICUM

Schol. III. Si vero denominator fractionis, ex qua radix erui debet, non sit numerus quadratus; ut si data sit fractio $\frac{2}{7}$; tunc multiplicato numeratore per denominatorem, extrahitur ex facto radix, cui supponitur ipsemet denominator. Erit igitur data fractionis radix $\frac{2}{7}$. Ratio est, quia $\frac{2}{7} \times 7 = \frac{14}{7}$ per Ax. 3. Cap. 3. Æqualium autem fractionum aequalis est radix, proinde $\sqrt{\frac{14}{7}} = \frac{2}{7}$.

Schol. IV. Fractio non quadrata fieri potest quadrata per divisionem, vel multiplicationem. Sic $\frac{2}{3}$ divisa per 3 fit $\frac{2}{9}$ per Ax. 3. Similiter $\frac{2}{3} \times 2$ fit $\frac{4}{3}$ per idem Ax. Ex quibus habetur radix quadrata, ut patet. Ceterum tam pro integris, quam pro fractis radix maxime propinqua haberi potest per Logarithmos, de quibus inferius.

P R O P O S I T I O III.

Ex dato numero radicem cubicam extrahere.

1. **D**ivide numerum datum *A* in membra, incipiendo dextrorsum, ita ut singula membra contineant tres figuras, excepto primo membro, quod aliquando duas, vel unam tantum continet. Quot erunt membra, tot erunt numeri radices inveniendæ.

2. Quære radicem cubicam primi membri sinistrorsum, si sit numerus cubicus; sin minus, sume radicem cubi proxime minoris in tabella superius posita, quæ in hoc exemplo est 2, quam pone ad dexteram, ut in *B*.

3. Ex

3. Ex hac radice fiat cubus 8, quem subtrahe ex primo membro 12, & residuum 4 scribe infra lineam, ut in C.

4. Ad hunc residuum adde unam sequentis membri figuram, nempe 1, fit 41, quem divide per triplum quadrati radice inventæ, nempe per 12, quotus 3 erit altera radice figura, quam pone in B.

5. Ex radice 23 fac cubum 12167, qui subtrahi debet ex utroque membro numeri A. Cumque nihil remaneat, signum est, numerum datum esse revera cubum.

$$\begin{array}{r}
 A \ 12,167 \quad (B \\
 \underline{8} \quad (23 \\
 \hline
 12) \quad C \ 41 \ 1
 \end{array}$$

Hæc operatio toties repeti debet, quot sunt membra numeri dati, ut in sequenti exemplo erit manifestum.

Sic aliud exemplum. Est numerus $M \ 11390625$, cujus radix cubica quaeritur.

1. Radix cubica primi membri 11 est 2, quam pone in N, ejusque cubum 8 subtrahe ex 11, remanet 3, quem scribe infra lineam in R.

2. Adde residuo R sequentem alterius membri figuram 3, fit 33, quem divide per triplum quadrati radice inventæ 2, hoc est per 12, quotus 2 erit secunda figura radice, quam pone in N.

3. Ex radice 22 fiat cubus 10648, qui auferatur ex numero $S \ 11390625$, nempe ex duobus mem-

mem-

L 2

mem-

84 DE EXTRACTIONE RADICUM

membris numeri dati M , remanent 742, ut in T .

4. Ad hoc residuum T addatur ex tertio membro numeri M figura 6, fiet 7426, qui divisus per triplum quadrati radicis inventæ 22, hoc est per 452, dat quorum 5, qui ponatur in N , eritque tertia radicis figura.

5. Demum fiat cubus ex tota radice 225, nempe 11390625, qui ablatu ex numero M nihil relinquit, proinde numerus datus est cubus.

$$M \ 11,390,625 \quad \left(\begin{array}{l} N \\ 225 \end{array} \right)$$

$$12) \ R \ 33$$

$$S \ 11390$$

$$10648$$

$$1452) \ T - 742,6$$

Ratio autem pendet ab ipsa cuborum genesi. Nam in priori exemplo cubus 12167, qui oritur ex radice 23, continet primo cubos 8 & 27, partium 2. & 3. Secundo triplum quadrati radicis 2 x 3. Tertio triplum quadrati radicis 3. x 2, hoc est

$$8 \dots$$

$$36 \dots$$

$$54 \dots$$

$$27$$

$$12167$$

Coroll

Coroll. Hæc praxis omnium facillima, traditur a Nevvtono in *Aritbem. Univ.*, & tribus paucissimis continetur. 1. Ad residuum, quod oritur ex subtractione cubi ex unoquoque numeri dati membro, additur una tantum sequentis membri figura. 2. Diviso illo residuo una cum figura adjecta per triplum quadrati inventæ radicis, quotus dat alterius membri radicem. 3. Ex numeris radicalibus (quotquot illi sint) fit cubus, qui subtrahitur ex totidem membris numeri dati, quot sunt ipsi numeri radicales inventi. Quæ quidem ex allatis exemplis satis patent.

Schol. I. Cum aliquid remanet, signum est, numerum datum non esse exacte cubicum, ac proinde radicem inventam non esse numeri dati, sed maximi cubi in eo contenti. Residuum exprimitur per fractionem hoc pacto: residuum ipsum ponitur super lineam loco numeratoris; pro denominatore autem sumitur differentia inter cubum datum, & cubum proxime majorem minus unitate. Sit exemplum, extracta radice cubica ex numero 46, habetur radix 3, & residuum 19. quod erit fractionis numerator; differentia autem inter cubum 27 ex radice 3, & cubum proxime majorem 64 ex radice 4, est 36, + 1 per Schol. 2. ad Defin. Auferatur unitas, remanent 36 pro denominatore fractionis. Est ergo radix cubica numeri dati $3 + \frac{19}{36}$.

Schol. II. Si quis propinquiores radicem, & quæ a vera insensibiliter differat, cupit, addat aliquot cypharum ternarios ad ipsum numerum datum, & prosequatur radicis extractionem. Deinde

inde ex radice inventa abjiciantur ad dexteram tot figuræ, quot cyphrarum ternarii fuerunt adjecti; reliquæ enim figuræ dabunt radicem integram cum fractione, cujus numerator erunt ipsæ figuræ rejectæ, denominator vero unitas cum tot cyphris, quot ternarii cyphrarum fuerunt additi, eo fere modo, quo de radice quadrata diximus.

Schol. III. Ceterum tam cubica, quam aliæ superiorum potestatum radices, longe facilius per Algebram expediuntur, maxime per formulas Newtonianas, quæ generales sunt, & ad omnem radicem extrahendam valde faciles, & expeditæ. Proinde hunc fontem adeant, qui rem funditus percipere cupiunt.

Enamen habetur ter ducendo in semet radicem cubicam inventam, & addendo illi residuum, si quod fuit. Restituitur enim cubus, seu numerus datus, si erratum non sit.

PROPOSITIO IV.

Ex fractionibus decimalibus radicem quadratam, & cubicam extrahere.

EX dictis satis patet ratio extrahendi radices ex fractionibus communibus. Pro Decimalibus autem peculiaris est regula.

I. Si extrahenda sit radix quadrata, observetur, an decimalis dati apex maximus sit par, ut in *A*; tunc enim extrahitur radix omnino, ut ex integris per *Prop. I. hujus*; & prima radice nota afficitur apicis maximi dimidio, ut in *B*.

Si

Si vero apex maximus sit impar, ut in *C*, adjecta cyphra, fiat par, ut in *D*, extractaque radice, ut supra, habetur radix quaesita, ut in *E*.

$$\begin{array}{l|l}
 A \overset{\text{II}}{23.04} [\overset{\text{I}}{48} B & C \overset{\text{III}}{22.500} \\
 & D \overset{\text{IV}}{22.5000} [\overset{\text{II}}{1.50} E
 \end{array}$$

Patet ratio, cur prima radice nota affici debeat dimidio apicis maximi decimalium. Nam si sit quadratum unitas cum cyphris 2, 4, 6 &c. ut 10000, 1000000 &c. unitas ipsa cum dimidio ejusmodi cyphrarum erit radix quadrata, nempe 10, 100, 1000 &c. Cum igitur apices stent loco denominatorum *per Coroll. 1. Cap. 4.* constat propositum.

II. In extractione autem radice cubice, observetur, an apex maximus decimalium trifecari possit, ut contingit in *M*; tunc enim extrahitur radix cubica, ut ex integris *per Prop. 3. hujus*, & prima radice nota afficitur apicis maximi triente, ut in *N*.

Si vero maximus apex trifecari nequeat, ut vides in *R*; adjice unam, vel duas cyphras, ut trifecari possit, ut in *S*; tum extrahe radicem cubicam *T*, ut supra.

$$\begin{array}{l|l}
 M \overset{\text{III}}{1.738} [\overset{\text{I}}{1.2} N & R \overset{\text{IV}}{26.2144} \\
 & S \overset{\text{VI}}{26.214400} [\overset{\text{II}}{0.64} T
 \end{array}$$

De-

2. Est turris alta pedes 100, quæ in ambitu habet fossam latitudinis pedum 40, fabricanda est scala, quæ ab ulteriore ripa pertingat ad cacumen turris, quæritur ejus longitudo.

Fiant quadrata numerorum 100, & 40, quæ simul addantur, fit summa 11600. Hinc extrahe radicem quadratam, erit scalæ fabricandæ longitudo pedum $107\frac{4}{11}$ per Prop. 1. & Schol. 2. ejusdem.

3. Volo fieri circulum duplum, triplum, quadruplum &c. alterius circuli dati, seu cujus nora est diameter in aliqua mensura.

Sit diameter circuli dati pollicum 6, lin. 5, & quærat circulus ejus duplus. Reducantur pollices ad lineas, eos multiplicando per 12, & addendo producto lineas 5, fient lineæ 77, quarum duplum est 154, qui numeri inter se multiplicentur, & ex producto 11858 eruatur radix quadrata, quæ invenitur $108\frac{27}{108}$ per Propos. 1. Circuli ergo dupli diameter erit linearum $108\frac{27}{108}$, hoc est pollicum $9\frac{27}{108}$ unius lineæ.

Schol. Quod de circulo dictum est, extenditur quoque ad quodlibet Polygonum regulare, nempe Quadratum, Pentagonum, Exagonum &c. si eorum duplum, triplum, quadruplum inveniri oporteat, dato uno ipsorum latere. Sed hæc ad Geometriam pertinent, & a Prop. 20. l. 6. Eucl. derivantur.

4. Fabricanda est cisterna cubica, quæ contineat aquæ pedes cubicos 68921, quæritur quantà futura sit ejus latitudo, longitudo, ac profundum.

M

Ex

Ex numero 68921 extrahatur radix cubica, quæ per *Propof. 3. hujus* dat pedes 41, unde innotescunt omnes ipsius cisternæ dimensiones.

5. Data diametro globi ferrei, lapidei, vel plumbei, qui libram unam ponderat, quæritur diameter pro globo ejusdem materiæ librarum 2, 3, 4, 5 &c.

Diameter data intelligatur divisa in partes 100, erit ejus cubus 1000000. Tum ex ejusdem cubi duplo, triplo, quadruplo &c. nempe 2000000, 3000000, 4000000 &c. radix cubica extracta per *Propof. cit.* dabit diametrum quæsitam globi librarum 2, 3, 4 &c. Seu, cubus diametri datæ ducatur in pondus, seu in numerum librarum globi, cujus diameter quæritur, & extrahatur ex producto radix. Invenienda sit diameter globi plumbei librarum 8; cubus $1000000 \times 8 = 8000000$, cujus radix cubica 2000 dat diametrum quæsitam. Hæc est *regula calibræ*, cujus ope ex data diametro globi unius libræ diametri reliquorum globorum ejusdem materiæ determinantur; & hinc quoque innotescit tormenti bellici cavitæ, seu diameter.

6. Depopulante sævissima lue Athenas, consultus fuit Apollo Delius, quo pacto illa cessaret; respondit, pestem cessaturam, si ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Hinc ortum est celebratissimum de duplicatione cubi problema.

Fuerit igitur ejus cubi latus palmorum 12, cujus duplum 24. Fiat ex 12 quadratum, quod multiplicetur per 24, erit $12 \times 12 = 144 \times 24 = 3456$. Extrahatur hinc radix cubica, quæ dat

pas-

palmos $15 + \frac{2}{10}$ ($= \frac{152}{10}$) Igitur ara illa cubica fabricari debet ex latere palmorum 15 cum fractionibus, proinde problema erit practice, non autem Geometricæ solutum, quod ab oraculo petebatur. Ratio hujus, & præcedentis pender *en Prop. 18. l. 12. Eucl., & Prop. 12. Cap. 6. sequentis*, quæ hujus loci non sunt: Sed hæc pauca sufficiant ad indicandum usum extractionis radicum, qui in universa fere Methesi in immensum patet.

C A P U T VI.

De Regulis Arithmetiis.

Regulæ Arithmeticæ sunt quatuor. 1. Est regula Proportionum. 2. Societatis. 3. Alligationis. 4. Positionis, vel falsi. Prima est omnium præcipua, & a qua reliquæ omnes pendent. Quo melius ea intelligatur, nonnulla sunt, de numeris proportionalibus, eorumque proprietatibus præmittenda.

D E F I N I T I O N E S.

I. **R**atio, five *proportio* est duarum ejusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo. Ut si compareretur 12 ad 4, intelligitur 12 continere ter 4, & habere rationem tripli: alter terminus dicitur *antecedens*, alter *consequens*.

M 2

II. Duz

II. Duæ rationes dicuntur *similes*, *eadem*, vel *æquales* (quod idem est) cum antecedens unius toties continet suum consequentem, quoties antecedens alterius continet suum consequentem. Vel cum antecedens unius toties continetur in suo consequenti, quoties antecedens alterius continetur in suo consequenti. Sic $12. 4 :: 3. 1$. sunt rationes similes, vel eadem, vel æquales, quia 12 & 3 ter continent suos consequentes 4 & 1, & 12 :: 1. 3. dicuntur similes, quia 4 & 1 ter continentur in suis consequentibus 12 & 3.

III. Quatuor illi termini, seu quantitates eandem rationem habentes, ut $12. 4 :: 3. 1$. dicuntur *Proportionales*. Et si termini medii bis sumantur, ita ut eadem quantitas semel sit consequens respectu præcedentis, & semel antecedens respectu consequentis, ut 2, 4, 8, in quibus 4 bis sumitur, dicuntur *continue Proportionales*. Si vero nullus terminus bis accipitur, ut $10. 5 :: 2. 1$. dicuntur termini *discretim proportionales*.

L I B R U S 2^{us} C A P I T U L U M 1^{um}

L I B R U S 2^{us} C A P I T U L U M 1^{um}

I. SI quatuor numeri proportionales fuerint, factum ex primo, & quarto, æquale est factum ex secundo, & tertio. Est *Propf. 19. l. 7. Eucl.*

Sint quatuor proportionales 5. 20 :: 4. 16.
Sicuti 5×16 dant $= 80$
Ita etiam 20×4 dant $= 80$

II. Si datis quatuor numeris, primus se habeat ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, factum

350 C. II

3 M

factum

Etum ex primo, & secundo æquale erit factum ex tertio, & quarto.

Sint quatuor numeri dati 6, 4, 3, 8, quia inter primum 6, & tertium 3 est eadem proportio dupla, quæ est inter 8 & 4, erit $6. 3 :: 8 \& 4$; ergo *ex lem. 1.* $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$; ergo factum ex primo, & secundo æquatur factum ex tertio, & quarto.

III. Si factum dividatur per unum ex suis factoribus prodibit in quoto alter factorum.

Sit factum v.g. 24, quod ortum sit ex 4×6 , si dividatur per 6 oritur 4.

PROPOSITIO I.

De Regula Proportionum.

Regula *Proportionum*, quam ob præstantiam & immensam utilitatem, *auream* vocant, docet modum inveniendi e tribus numeris cognitis quartum ignotum proportionalem, qui nimirum habeat eandem proportionem ad tertium numerum datum, quam secundus habet ad primum; ideoque dicitur regula *Proportionum*, vel etiam regula *Trium*, quia ex tribus datis eruit quarto. *En praxis.*

I. Disponantur ordine tres numeri dati, ita ut is, qui quæstionem habet annexam, statuatur tertio loco; illè vero ex duobus aliis, qui cum hoc est homogeneus, hoc est qui eandem rem significat ac terminus tertio loco positus, primo loco ponatur.

II. Mul-

94 DE REGULIS ARITHMETICIS

II. Multiplica tertium per secundum, & productum divide per primum, quotus dabit quartum proportionalem quæsitum. Res tribus exemplis illustratur.

1. Ulnæ panni 2 stant scutis 9, quot scutis stabunt ulnæ 12 ejusdem panni? terminum qui habet annexam quæstionem, sunt ulnæ 12: hic statuatur loco tertio, loco autem primo terminus huic homogeneus, nempe ulnæ 3, scilicet

$$Ulnæ 3. scut. 9 :: ulnæ 12. scut.$$

Duc 12 \times 9, & productum 108 divide per 3, quotus 36 dat quartum proportionalem quæsitum. Nam, ut patet.

$$3. 9 :: 12. 36$$

2. Rex Salomon in ædificando templo habuit operarios 180000. Ponamus cuilibet operario quotidie solvisse tantum asses 10. Quot scuta Romana singulis diebus expendit?

$$Si oper. 1. asses 10. quid oper. 180000.$$

Multiplicatis 180000 \times 10, producitur 1800000, & cum unitas non dividat, habentur pro quarto proportionali asses 1800000. Hos divide per 100 (refectis duabus cyphris) fiunt scuta Romana singulis diebus solvenda 18000.

3. Fixarum motus ex Ricciolio & Flamsteedio

singulis 100 annis procedit gr. 1. 23. 20, quot an-

ni

ni requiruntur ad totum cœli ambitum , seu gr.

I II

360 percurrentos? Primo gr. 1. 23. 20 reducantur ad minuta secunda per multiplicationem, scilicet $1 \times 60 + 23 = 83 \times 60 = 4980 + 20$ fiunt 5000. Similiter gr. 360 $\times 60 \times 60$ fiunt 1296000. Dic jam, si minuta secunda 5000 dant annos 100, quot annos dabunt minuta secunda 1296000? Invenientur per regulam auream anni 25920, qui nimirum annum Platonicum conficient.

5000. 100 :: 1296000. 25920.

Coroll. Ex hoc exemplo manifestum est, terminos proportionales regulæ aureæ, antequam regula ipsa instituat in homogeneos esse reducendos; si forte numeris heterogeneis consistent. Sic si dicatur, libræ 5 unc. 3 veneunt scutis 4, & assibus 50, quot scutis stabunt libræ 12? Libræ reducendæ sunt ad uncias in primo & tertio termino, & scuta ad asses, & tres termini proportionales erunt uncia 63, ass. 450, unc. 144.

Schol. Cum integris adhaerent facti, prius integri reducuntur ad fractos: integris autem, quibus nulla est fractio, supponitur unitas; deinde regula proportionum fit, ut dictum est. Si dicatur hora 1 $\frac{1}{2}$ fluunt ex aliquo canali libræ 15 aquæ, quot libræ fluent horis 2 $\frac{1}{2}$? Termini proportionales redacti erunt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{11}$. Tum operando juxta præcepta tradita in Prop. 10. & 11. Cap. 3. invenies aquæ libras 26 $\frac{1}{2}$.

De-

Demonstr. clare infertur *ex lemm.* 1. & 3. Nam cum in regula proportionum supponatur dati tres numeri proportionales, & quartus, qui est ignotus, dari possit; factum ex secundo, & tertio æquale erit (*per lem.* 1.) factum ex primo, & quarto, qui est ignotus. Proinde si factum ex secundo, & tertio dividatur per primum, innotescet quartus terminus (*per lem.* 3.); ergo patet ratio, cur ex tradita regula multiplicari debeat tertius per secundum terminum, & factum dividi per primum.

Enamem regulæ proportionum omnium expeditissimum habetur multiplicando primum terminum per quartum, & secundum per tertium. Nam si producta sint æqualia, res bene processit. Ratio patet *ex lem.* 1.

P R O P O S I T I O I.

De regula proportionum Composita.

Regula proportionum *Composita* dicitur, cum præter tres terminos in *Propos. præc.* explicatos, alii quoque minus principales accedunt, qui significant tempus, lucrum, damnum &c. qui cum terminis principalibus per multiplicationem componuntur, ut fiant tres solum termini. Exempla rem declarabunt.

1. Juvenes 4. contubernales expenderunt diebus 10. aureos 50; quæritur quot aureos solvere debeant juvenes 12 diebus 30? Tres principales termini sunt juvenes 4, aurei 50, & juvenes 12. Ad juve-

juvenes 4 spectant dies 10, & ad juvenes 12 die 30. Duc itaque 4×10 , & 12×30 , habentur duò termini compositi 40, & 360. Dic ergo

Si 40. dant aur. 50, quid 360?

Multiplicando 360×50 , & productum dividendo per 40, ut in *præc. Propos.* factum est, invenitur quartus proportionalis 450.

2. Libræ 200 alicujus mercis transvectæ Romam per milliaria 300 poscunt scuta 40; quæritur expensa pro transvehendis libris 500 ejusdem mercis per milliaria 500? Tres termini principales sunt libræ 200, scuta 40, & libræ 400. Minus principales sunt milliaria 3000, & 550; qui si multiplicentur per suos terminos principales, fient tres termini pro regula trium instituenda, nimirum

$$60000.40 :: 20000.133\frac{1}{3}$$

Schol. I. *Regula proportionum composita est regula simplex proportionum repetita; unde etiam regula Dupli dicitur, quia duplicem questionem involvit. Proinde resolvi etiam potest in duas regulas simplices, in quarum altera ponuntur tres termini principales dati, & quæritur quartus proportionalis; in altera vero ponuntur circumstantiæ, seu termini minus principales, in quorum medio ponitur quartus proportionalis inventus; Sic in superiori exemplo dic, si libræ 200 exigunt scuta 40, quid libræ 400? Quartus proportionalis est 80, ut patet. Dic secundo si mil-*

N

lia.

98. DE REGULIS ARITHMETICIS
liaria 3000 dant 80, quid milliaria 500? Inveni-
tur quartus proportionalis, ut supra, $133\frac{1}{3}$.

Schol. II. Hæc regula dicitur etiam del Cin-
que, quia terminos quinque notos supponit. Exa-
men fit ut in præc. propos.

P R O P O S I T I O III.

De regula proportionum Inversa.

IN regulis proportionum tum simplici, tum com-
posita jam explicatis, ita se habet prius ter-
minus ad secundum, sicuti tertius ad quartum
ut exempla allata satis monstrant; proinde ex
Propos. 14. lib. 5. Eucl. si primus terminus ma-
jor, vel minor est tertio, etiam secundus major,
vel minor esse debet quarto, ut consideranti patet.
Solet autem nonnunquam accidere ex ipsa natu-
ra quæstionis, ut quanto major, vel minor pri-
mus terminus est tertio, tanto major, vel minor
reciprocè esse debeat terminus quartus secundo.
In hoc casu regula proportionum dicitur *inversa*,
quia scilicet terminorum ordo invertitur. Hærent
hic tyrones primo, non bene dignoscentes, utra
regula sit adhibenda. Sed quæ sequuntur exem-
pla, rem satis illustrent.

1. Messores 20. segetem aliquam metunt diebus
4, quæritur quot diebus illam metere possint mes-
sores 10? Patet majori tempore, adeo, ut quanto
major est terminus primus tertio, tanto major quo-
que debeat esse quartus incognitus secundo. Nam

Mess.

Mess. dies Mess. dies

20 . 4 :: 10 . 8.

2. In obsessa Urbe ali possunt milites 1500 mensibus 3, quæritur quot milites ali poterunt mensibus 6? Certe minor numerus. Proinde quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor quartus erit secundo, scilicet

Mens. Mil. Mens. Mil.

3 . 1500 :: 6 . 750.

3. Ex panno habente latitudinem palmorum 3 requiruntur mihi pro vestimentis ulnæ 10, quæritur quot ulnæ requirantur ex alio panno, qui latitudinem habet palmorum 4. Certum est, pauciores requiri, adeoque quanto minor est primus terminus tertio, tanto minor erit quartus secundo, nempe

lat.pal. uln. lat.pal. uln.

3 . 10 :: 4 . 7½

Ad inveniendum autem in regula Proportionum inversa quartum proportionalem, multiplicetur primus terminus per secundum, & productum dividatur per tertium. Sic in primo exemplo ductis 20 X 4, productum 80 dividatur per 10, habetur quartus proportionalis 8.

Demonstr. sequitur ex 2. & 3. lemm. Nam in regula proportionis inversa cum se habeat primus

N 2

termi-

terminus ad tertium, ut reciproce quartus ad secundum, erit *ex* 1. *lemm.* productum ex primo & secundo æquale producto ex tertio & quarto. Producti autem, quod fit ex tertio & quarto, habetur unus ex factoribus datus, numerus scilicet tertio loco positus, ergo si per hunc dividatur productum æquale, quod fit ex primo & secundo, prodibit *ex* *lemm.* 3. quartus proportionalis quæsitus,

Examen itaque regulæ inversæ fit brevissime, multiplicando primum terminum in secundum, & tertium in quartum. Nam si producta sint æquales, res bene peracta est.

Schol. I. *Arithmetici in quibus Tacquet, assignant dignoscendæ hujus regulæ indicium hujusmodi. Cum proponitur aliqua res diversa a quatuor terminis quæstionis, tunc proportio erit reciproca, seu inversa. Sic in primo exemplo proponitur seges metenda, quæ est res omnino diversa a quatuor terminis proportionalibus. In secundo exemplo proponitur annonæ, quæ est res diversa a quatuor terminis ejusdem quæstionis. Similiter in tertio vestis conficienda, quæ proponitur, est quid diversum a terminis in quæstione datis. Hoc dictum sit in gratiam tyronum. Ceterum ex ipsa quæstionis natura facile dijudicari potest, utrum proportio directa sit, an inversa.*

Schol. II. Si terminus, qui annexam habet quæstionem, ponatur primo loco, secundo autem loco terminus illi homogeneus, proportio inversa reducitur ad directam. Sic in primo exemplo messores 10 se habent ad messores 20, ut dies 4 ad dies

dies 8, proinde ducendo 20×4 , & dividendo productum 80 per primum terminum 10, habetur quartus proportionalis, ut in Propof. 1. hujus. Similiter in secundo exemplo menses 6 ad menses 3 ita se habent, ut milites 1500 ad milites 750, adeoque producto ex 3×1500 divisio per primum terminum 6, oritur quartus proportionalis 750, ut antea.

Schol III. Regulam inversam compositam ultro omitimus, quod tyrones haud parum soleat confundere, & in rebus Geometricis, vel etiam in hominum commercio vis unquam occurrat.

PROPOSITIO IV.

Explicantur nonnulla pro regulis proportionum compendia.

I. **C**Um in regula directa primus terminus præcise continet secundum, vel (quod idem est) præcise continentur in secundo, tunc reduci potest proportio ad minimos terminos per Prop. 2. Cap. 3., & regulæ praxis brevissima evadit. Sic exemplum, lib. 4. valent scuta 12, quod libræ 9? Reductis 4 & 12 ad minimos terminos. 1 & 3, dic si 1 dat 3, quid 9? & ducendo 3×9 , habetur quartus proportionalis 27, qui unitas non dividit.

Pro regula inversa in primo exemplo Prop. 3. Si messorum 20 exigunt dies 4, quid messorum 10? Quia 20 ad 10 se habere debet reciproce, ut quartus

tus

tus terminus ad secundum 4, reductis 20 & 10 ad minimos terminos 2 & 1, dic si 2 dat 4, quid 1? ductisque 2 X 4, habetur quartus proportionalis 8.

II. Ad evitandum divisionis prolixioris tedium, dividatur tertius terminus per primum, & quotus ducatur in secundum: vel dividatur secundus per primum, & quotus ducatur in tertium, in utroque enim causa operatio fit brevior. Ut si leucæ 25 dant miliaria Italica 60, quid leucæ 100? Divisis 100 per 25, duc quotum 4 X 60, erit 240 quartus proportionalis quæsitus. Vel diviso 60 per 25, quotus $2\frac{2}{5}$ ducatur in 100, productum $\frac{200}{5}$, seu 240, erit quartus proportionalis quæsitus.

III. Regula proportionum confici potest per solam divisionem, nimirum dividendo primum terminum per secundum, & dividendo per hunc quotum terminum tertium. Sic ex. gr. 2 gradus circuli maximi terræ continent miliaria Italica 120, gradus 360 quot miliaria continebunt. Diviso primo termino per secundum, habetur $\frac{1}{60}$, hoc est $\frac{1}{60}$; per hunc divide 360, quotus $\frac{3600}{60}$ dat miliaria Italica quæsitæ.

IV. Si fractiones afficiant primum terminum tantum, ut si dicatur $12\frac{1}{2}$ dant 4, quid 20? Multiplica per denominatorem 2 tam primum, quam tertium terminum, fient tres termini proportionales sine fractionibus 25, 4, & 40. Si afficiant solum secundum terminum, ut 6 dant $20\frac{1}{2}$, quid 10? Satis est multiplicare per eundem denominatorem 3 primum & secundum terminum, erunt

erunt termini proportionales 18, 61, & 10. Similiter si fractiones ejusdem nominis afficiant primum & tertium terminum, ut si dicatur $3\frac{2}{3}$ dant 20, quid $10\frac{2}{3}$? Multiplicatis iisdem duobus terminis per denominatorem 5, erit regula sine fractis, ac termini proportionales 17, 20, 53. Si termini sibi respondentes sint minutia ejusdem nominis, ut $\frac{1}{2}$ dat 20, quid $\frac{1}{3}$? delectis denominatoribus erunt termini proportionales 2, 20, 1. Horum ratio, perceptis fractorum regulis, satis patet.

Schol. *Hec, aliaque similia compendia dicuntur Italica, vel quia ab Italis inventa, vel quia in Italia usum habeant frequentiore.*

P R O P O S I T I O V.

De Regula Societatis.

Regula, quae docet modum dividendi numerum in data proportione, vulgo dicitur *Regula Societatis*, quod apud homines mercaturae societatem inventas frequenter adhiberi solet.

Sint mercatores *A, B, C*, qui societate inita, lucrati sunt aureos 800. *A* posuit in sortem communem aureos 100, *B* aureos 160, *C* vero 240: quaeritur quantum quisque ex eo lucro debeat accipere. Collige in unam summam singulorum pecuniam, nempe aureos 500. Deinde instituaturnoties regula proportionum, quot sunt singulorum pecuniae, ita ut primus terminus semper statuatur summa pecuniae collatae, secundus lucrum au-

reo-

morum 800, tertius vero uniuscujusque pecunia
A, B, C.

Dic ergo si 500 dat 800, quid 100? 160
quid 160? 256
quid 240? 384

800

Patet lucrum *A* fuisse aureorum 160, lucrum
B 256, & *C* 384, quæ simul efficiunt summam
lucri, adeoque statim habetur regulæ examen.

II. Si pecunia unius diutius fuerit in negotia-
tione, quam pecunia alterius, tunc uniuscujusque
pecunia multiplicari debet per suum tempus. Ce-
tera peragenda, ut supra.

Sit exemplum. *A* posuit in sortem communem
aureos 50 annis 2, *B* aureos 100 annis 3, *C* vero
aureos 200 anno 1. Lucrum fuit aureorum 500,
quæritur singulorum lucrum. Duc 50. \times 2, 100
 \times 3, & 200 \times 1, producta dant summam 600:
quæ erit primus terminus proportionum: secun-
dus lucrum comparatum aureorum 500; tertius
vero pecunia singulorum per suum tempus multi-
plicata.

Dic ergo si 600 dant 500, quid 100? 83 $\frac{1}{3}$

quid 300? 250

quid 266? 166 $\frac{2}{3}$

500

Est igitur lucrum ipsius *A* aureorum 83 $\frac{1}{3}$. Lu-
crum *B* aureorum 250, *C* vero aureorum 166 $\frac{2}{3}$,
quæ addita faciunt aureorum summam 500.

III. Quod

III. Quod si singulorum pecunia æqualis fuit, tempus autem inæquale? nam *A* reliquit in societate pecuniam suam mensibus 7, *B* vero mensibus 6, *C* denique mensibus 12, lucrum autem extiterit aureorum 1000; collige in unam summam menses, faciunt 25, eritque hic primus regulæ terminus, secundus erit lucrum, tertius menses singulorum. Tum adhibe ter regulam auream, invenies lucrum primi aureos 280, secundi 240, tertii 480.

Si menses aur. quid menses.

25. 1000. :: 7? 280

6? 240

12? 480

Coroll. Hinc apparet modus dividendi pecuniam v.g. aureos 1000 in proportione data temporis, quo tres famuli domino suo servierunt; quorum primus serviverit annis 7, secundus annis 6, tertius annis 12. Aliæ similes quæstiones ex hac regula facile solvuntur, quæ non est, nisi regula proportionum sæpe repetita, ut patet. Quod de lucro dictum est, intelligi eodem modo debet de damno, si societati improspere cesserit, ac damnum in singulos fit dividendum, & habitæ ratione pecuniarum, & temporis.

PROPOSITIO VI.

De Regula Alligationis.

Cum variae res diversi pretii inter se alligantur, seu miscentur, ut varii liquores, merces, metalla &c. atque inde pretium partibus mixti respondens inquirunt: seu, cum pretio quodam medio proposito, quaritur, quantum ex singulis mercibus, aut liquoribus misceri debeat, ut pretio illo arbitrario vendi possint; in utroque casu adhibetur regula, quam Arithmetici regulam *Alligationis* vocant, quæ per exempla satis superque innotescet.

I. Conflanda est statua argentea librarum 300. Artifex duo argenti genera posuit, alterum quod in singulas libras stat scutis 30, alterum vero scutis 25. Ex priorè posuit libras 120, ex posteriore libras 180. Quaritur quot scutis stabit in singulis libris ejusmodi statua?

Duo libras 120 \times 30 fit 3600
 180 \times 25 fit 4500
 Summa fit 8100

Tum divide totius argenti pretium 8100 per numerum librarum 300, quotus 27 indicat unius librae pretium. Nam si lib 300 valent scut. 8100, quid lib. 2? Ex regula aurea habentur 27.

II. Sunt duo olei, aut vini genera, mensura 1 primi generis stat julis 24, secundi generis men-
 PRO fura

fura 1 valet julis 35. Si quis non habeat nisi julios 33, & mensuram unam ex utroque vino mixtam petat, quaeritur ex utroque quantum debeat accipere

1. Pone unum pretium statutum sub altero 24 & 35, & ad sinistram pretium arbitrarium 33, medium inter pretia statuta 24 & 35; ad dexteram vero differentias inter hoc, & pretia illa, sed alternatim ita ut differentia pretii minoris 24 (hoc est 9) ponatur juxta pretium majus 35, & differentia pretii majoris 35, nempe 2, ponatur juxta pretium minus 24, ut in sequenti exemplo factum vides.

2. Colligantur differentiae in unam summam, ut hic 11, & instituaturs regula trium toties, quot sunt differentiae, nempe bis in hoc exemplo; ita ut summa differentiarum 11 occupet primum locum, mensura vero 1 secundum locum, & una ex differentis tertium. Tum dic, si 21 dat 1, quid 2? Rursus, si 11 dat 1, quid 9? Invenies ex potiori vino accipiendas esse $\frac{2}{11}$ unius mensurae, ex altero vero $\frac{9}{11}$, quae simul sumptae faciunt $\frac{11}{11}$, hoc est mensuram unam quaesitam.

Pretia Differ.

33	24	2	Si 11 dat 1,	quid 2?	$\frac{2}{11}$
35	9	2		quid 9?	$\frac{9}{11}$

Summa 11

$\frac{11}{11}$

III. Quando autem plurium, quam duarum rerum pretia statuta proponuntur, ita tamen ut saltem unum sit majus, alterum vero minus pre-

tio

tio arbitrario; tunc plures fieri debent alligationes, quod exemplo satis vulgari explicatur.

Libra 1 Caryophylli valet juliis 3. Piperis libra, juliis 4. Cinnamomi, 6. Croci, 9: quæ brevitatis gratia sint *A*, *B*, *C*, *D*. Pretium vero medium sit *M*. Quæritur, quantum quis debeat ex singulis accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7. Primo disponantur ordinatim pretia, ut in exemplo sequenti. Secundo alligentur inter se duo pretia *A* & *D*, hoc est comparenter ambo cum pretio *M*, ut inveniatur differentiarum excessus, & defectus, nempe 2 & 4, quæ ponantur alternatim juxta *A* & *D* modo superius explicato. Eodem modo alligentur duo pretia *B* & *D* (idem pretium alligari potest pluries) differentiarum excessus est 2, defectus autem est 3, quæ ponantur alternatim juxta *B* & *D*. Similiter alligentur *C*, & rursus *D*, differentiarum sunt 2 & 1, quæ pariter statuuntur alternatim juxta *C* & *D*.

3. Colligantur omnes illæ differentiarum in unam summam, quæ hic est 14. Deinde dic, si 14 dat libram 1, quid differentia 2? erit $\frac{2}{14}$, seu $\frac{1}{7}$; quod toties iteretur, quot sunt pretia data *A*, *B*, *C*, *D*, adeo ut tres differentiarum 4, 3, 1, quæ appositæ sunt ipsi *D*, addantur, & unicam differentiam 8 efficiant. En totius calculi typus.

	Pretia	Differ.	
<i>A</i> 3	3	7	
<i>B</i> 4	4	2	
<i>M</i> 7	7	2	
<i>C</i> 6	6	2	
<i>D</i> 9	9	4-3-1	
	Summa	14	Si

$$\begin{array}{r}
 \text{Si 14 dat lib. I. quid } 2? \frac{2}{14} \\
 \phantom{\text{Si 14 dat lib. I. quid }} 2? \frac{2}{14} \\
 \phantom{\text{Si 14 dat lib. I. quid }} 2? \frac{2}{14} \\
 \phantom{\text{Si 14 dat lib. I. quid }} 8? \frac{8}{14} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\text{Summa } \frac{28}{14} = 1.$$

Si fractiones, aut partes mixti additæ adæquent totum, regulæ examen exhibent. Sic in exemplo $\frac{28}{14} = 1$.

Demonstr. Summa differentiarum, quibus pretia statuta differunt per excessum, & defectum a pretio medio, habet ad totum mixtum eandem rationem; quam habent singulæ differentiæ seorsim sumptæ ad singulas partes mixti seorsim sumptas, ut patet; proinde toties regula proportionum iteratur, quot sunt differentiæ: quæ idcirco locum alternant, ut pretium deficiens unius compensari queat per excessum alterius pretii. Quod &c.

Corol. I. Ex superiori exemplo manifestum est, unumquodque pretium saltem semel alligari debere, idemque pretium posse pluries assumi, ut factum est cum pretio *D*.

Corol. II. Alligationes hujusmodi fieri possunt variis modis, siquidem pretium medium semper comparetur cum duobus pretiis, altero majori, altero minori. Pro diversa autem alligatione, diversa erit unius, vel alterius mercis, aut liquoris quantitas in mixto posita, ut patet.

PRO-

PROPOSITIO VII.

De regula simplicis Positionis, seu falsi.

EA regula *falsi* dicitur, quæ ex positione numeri plerunque falsi docet verum numerum invenire, qui quæstioni satisfaciatur. Dicitur *simplicis Positionis*, si simplex ponatur numerus, ut in hac Propos. fiet; duplicis vero, si duo numeri assumantur, ut in *Prop. seq.*

Regula simplicis Positionis in tribus consistit, nempe.

1. Ponitur numerus, qui videtur aptus ad solvendam quæstionem, qui dicitur *Positio*.

2. Examinatur ille numerus, an talis sit, qualis exquiritur.

3. Instituitur regula proportionum ad verum numerum inveniendum. Res exemplis fit evidens.

I. Sempronius testamento mandavit, aureos centum distribui in tres fratris sui filios *A*, *B*, *C* hac lege, ut *A* habeat partem duplam *B*, & *B* partem triplam ipsius *C*. Quæritur quantum singuli debeant accipere.

Pone *A* habere aureos 6, habebit *B* aureos 3, *C* vero 1. Examina, an tres illæ partes 6, 3, 1 simul efficiant 100 (nam si 100 efficerent, problema esset absolutum) sed illæ efficiunt tantum 10. Adhibe jam regulam proportionum, in qua ponatur primo loco numerus, qui ex falsa positione provenit, ut hic 10: secundo loco statuitur numerus

merus

merus primo assumptus, seu Positio, ut hic 6; tertio loco numerus datus in quaestione, hoc est 190, invenies 60. Itaque *A* habebit 60 aureos, *B* 30, *C* vero 10, quorum summa est 100, scilicet.

$$10. 6 :: 100. 60.$$

II. Cajus interrogatus, quot aureos haberet, respondit, aureorum meorum $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ faciunt summam 470. Quæritur ea summa? Patet hic quaeri numerum, cujus partes $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ simul sumptæ efficiunt 470. Ad evitandas fractiones, assume numerum, qui contineat partes in quaestione expressas. Esto hic 60, cujus $\frac{2}{3} = 20$, $\frac{1}{4} = 15$, $\frac{1}{5} = 12$, quæ partes additæ faciunt 47. Debebant autem efficere 470. Institue regulam proportionum, dispositis terminis modo superius explicato, nimirum.

$$47. 60 :: 470. 600.$$

Habebat ergo Cajus aureos 600, quorum $\frac{2}{3} = 200$, $\frac{1}{4} = 150$, $\frac{1}{5} = 120$, quæ partes simul additæ efficiunt 470.

III. Sunt quatuor molæ, quarum prima singulis horis molit tritici modios 7, secunda 6, tertia 4, quarta 3. Quæritur tempus, quo molentur tritici modii 360, omnibus illis molis simul adhibitis.

Pone requiri horas 5, hoc tempore prima mola conficit modios 35, secunda 30, tertia 20, quarta 15, qui omnes sunt modii 100, debebant autem esse 360. Instituaturs ergo regula propor-

tionis: si modii 100 possunt horas 5, quid modii 360? Invenies horas 18. Nam

$$100. 5 :: 360. 18.$$

Quo tempore prima mola conficiet modios 126, secunda 108, tertia 72, quarta 54, qui simul additi efficiunt modios 360.

Demonstr. Ut se habet (in primo exemplo 10 ad $6 + 3 + 1$ simul sumptos in falsa positione, ita se habet in vera positione 100 ad $60 + 30 + 10$ simul sumptos. Proinde regula stat in hoc ut numerus falsus 10, productus per numerum falsum 6, ita se habeat per regulam auream ad ipsum numerum falsum 6, sicuti verus numerus 100 ad verum numerum 60.

PROPOSITIO VIII.

De Regula duplicis Positionis.

Regula duplicis Positionis non unum, sed duos supponit numeros; ut in *Propos. præc.* dictum est, solvitque plures quæstiones, quæ per unam positionem resolvi nequeunt. Omnes tamen quæstiones, quæ per unam positionem solvuntur etiam per duas solvi possunt. Quando autem duplici positione opus sit, indicabitur inferius in *Schol.* En regulae ordo.

1. Pone pro numero quæsito quemcumque numerum, qui dicatur *Positio*, & cum eo procede juxta

juxta tenorem quæstionis; cui si non satisfaciat errorem (hoc est excessum, vel defectum, quo positio aberrat a numero quæsito) subscribe eidem positioni, cum signo +, vel —, quorum unum plus, sive excessum, alterum minus, seu defectum denotat.

2. Ponatur alius numerus priore major, vel minor, cum quo similiter examinetur quæstio proposita; cui si non satisfaciat, errorem pariter ei positioni subscribe cum signis +, vel —. Cum ambo errores sunt per excessum, vel ambo per defectum, dicuntur *similes*. Cum autem unus est per excessum, alter per defectum, hoc est cum signis diversis + & —, dicuntur errores *dissimiles*.

3. Si errores sunt similes, ducatur prima positio in errorem positionis secundæ, & vicissim positio secunda in errorem primæ positionis. Tum horum productorum differentia dividatur per differentiam errorum, quotus erit numerus quæsitus.

4. Si errores sunt dissimiles, productorum summa dividitur per summam errorum, quotus dat quæsitum.

VI. Tres juvenes *A*, *B*, *C* lucrari sunt aureos 47. *B* obtinuit aureos 5 plus quam *A*; *C* tantundem quantum *B*, & insuper 10, quæritur lucrum singulorum.

Pone lucrum *A* fuisse 4, lucrum *B* erit 9; *C* vero 19. Adde simul 4, 9, 19, sunt 32, at debebant esse 47, est ergo error, seu defectus in 15.

Rursus pone lucrum *A* fuisse 7, erit lucrum *B* 12; *C* vero 22, qui simul faciunt 41, quæ summa deficit a vera 47 per defectum 6.

219

P

Cum

114 DE REGULIS ARITHMETICIS

Cum itaque duo errores similes sint (nempe ambo per defectum) duc positionem 4 in errorem secundæ positionis, hoc est in 6, & positionem 7 in errorem 15; sunt duo producta 24 & 105, quorum differentia est 81, quem divide per differentiam unius erroris ab alio, idest per 9, (subtrahendo errorem 6 ex alio errore 15) quotus 9 dat numerum quæsitum. Itaque lucrum *A* fuit aureorum 9, *B* vero 14, & *C* 24, quorum summa est 47.

$$\begin{array}{l} \text{Posit. 4, Err. — 15) } 9 \text{ diff.} \\ \text{Posit. 7, Err. — 6) } \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Prod. 4} \times 6 = 24 \\ \quad 7 \times 15 = 105 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Differ. 81}$$

II. Si utraque positio fit excedens, praxis est omnino eadem. Ponamus enim lucrum *A* fuisse 12, erit lucrum *B* 17, & lucrum *C* 27, quorum summa est 56, excedens numerum datum 47 per errorem 9.

Pone iterum 11 pro lucro *A*, erit lucrum *B* 16, & lucrum *C* 26, quorum summa 53 adhuc peccat per excessum 6. Cum igitur errores similes sint (nempe per excessum) duc positionem 12 in errorem 6 alterius positionis, & positionem 11 in errorem 9. Tum subtrahere productum minus 72 ex majori producto 99, & residuum 27 divide per differentiam errorum 9 & 6, hoc est

ans.)

per

per 3, quotus 9 dat numerum quæsitum, ut prius.

$$\begin{array}{r} \text{Posit. } 12, \text{ Err. } + 9 \\ \text{Posit. } 11, \text{ Err. } + 6 \end{array}) 3 \text{ diff.}$$

$$\text{Prod. } 6 \times 12 = 72$$

$$9 \times 11 = 99$$

Differ. 27

III. Quod si una positio sit excedens, altera deficiens, summa productorum dividitur per summam errorum, ut dictum est supra num. 4. Sit idem exemplum claritatis gratia.

Pone lucrum *A* fuisse 5, lucrum *B* erit 10, & lucrum *C* 20, quorum summa 35 deficit a summa data 47 per defectum 12; sumendus est igitur numerus major.

Pone lucrum *A* 11, *B* vero 16, & *C* 26, summa omnium 53 excedit veram summam 47 in 6. Ducatur jam positio prima 5 in errorem 6, & vicissim positio 11 in errorem 12. Deinde quia errores sunt dissimiles, addantur duo producta 30 & 132, eorumque summa 162 dividatur per summam errorum 18, quotus 9 dat rursus numerum quæsitum, ut antea.

$$\begin{array}{r} \text{Posit. } 5, \text{ Err. } - 6 \\ \text{Posit. } 11, \text{ Err. } + 12 \end{array}) 18 \text{ summa}$$

$$\text{Prod. } 5 \times 6 = 30$$

$$11 \times 12 = 132$$

Summa 162

P 2

Sit

Sit aliud exemplum. Interrogatus Pythagoras de numero suorum discipulorum, respondit, eorum dimidium, dare operam Geometriæ, quartam partem Philosophiæ, septimam partem servare silentium; insuper tres alios se habere instituendos. Quæritur eorum discipulorum numerus.

Ponatur discipulos habuisse 56, dimidium erit 28, quarta pars 14, septima pars 8, quorum summa est 50: his addantur illi 3, fiunt 53, deberent esse 56; est ergo error per defectum 3, quem nota juxta ipsam positionem 56.

Rursus ponatur discipulorum numerus 112, dimidium erit 56, quarta pars 28, septima 16, quæ simul efficiunt 100, additisque 3, fiunt discipuli 103. Est ergo iterum error per defectum 9, quem nota ad positionem 112.

Jam duc positionem primam 56 in errorem secundæ positionis, hoc est, in 9, & vicissim positionem secundam 112 in alterius positionis errorem 3, proveniunt 504 & 336. Cumque errores similes sint, eorum productorum differentiam 168 divide per differentiam errorum 6, quotus 28 dat numerum quæsitum discipulorum. Nam ejus dimidium est 14, quarta pars 7, septima 4, quæ simul faciunt 25, additisque 3, habetur numerus 28.

Posit. 56, *Err.* - 3) 6 *diff.*

Posit. 112, *Err.* - 9) 112

Prod. 56 x 9 = 504

112 x 3 = 336

Differ. 168

Postremo sunt tres numeri ignoti a, b, c , qui sumpti bini dant summam, ut sequitur.

$$a + a = 50$$

$$b + c = 70$$

$$a + c = 60$$

XI C I T I 2 O R O P R

Quæritur singulorum valor. Pone $a = 16$, erit $b = 34$, ergo $c = 36$, proinde $a + c = 16 + 36$, hoc est 52. Sed esse debebat 60; ergo positio prima 16 peccat per defectum 8.

Pone itaque $a = 18$, erit $b = 32$, ergo $c = 38$, adeoque $a + c = 18 + 38$, hoc est = 56, sed debebat esse 60; est ergo rursus error per defectum 4. Pro inveniendo vero numero, fiant cetera, ut supra; reperietur $a = 20$, proinde $b = 30$, $c = 40$, unde $a + c = 20 + 40$, sed 60, quod quærebatur.

Schol. Indiciem autem quando quæstio proposita solvi non possit per unam positionem, sed duplicem omnino requirat, est cum quæstioni aliquis determinatus numerus additus afficit, qui una cum numero ad libitum posito debet assumi. Sic in primo exemplo numeri illi determinati 5, 10, qui adduntur numero ad libitum posito, indicio sunt duplici positione opus esse. In secundo autem exemplo numerus ille determinatus discipulorum 3 non importat duplicem positionem, quia non afficit partes aliquotas $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ numeri quæsiti, unde quæstio illa etiam per simplicem positionem solvi potest. Quæritur enim numerus, ex quo si auferantur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ residuum sit 3. Ponatur idem

numerus 56, qui prius; erit $56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$
 $= 6$, quod residuum debebat esse 3. Dicatur er-
 go si residuum 6 provenit ex 56, unde 3? Pro-
 dibit quartus proportionalis 38, qui questionem
 solvit, ut antea.

PROPOSITIO IX.

*Aurificis furtum in corona Hieronis regis
 detegere.*

Vitruvius *lib. 9. Cap. 3.* refert, ab Archime-
 de deprehensam fuisse fraudem, quam ar-
 tifex auream Hieronis regis coronam, admixta ar-
 genti portione, adulteraverat; sed quo præcise
 artificio id egerit, non satis constat. Duas tamen
 massas fecisse dicitur, alteram ex auro puro ejus-
 dem ponderis cum corona, alteram ex argento
 item puro ponderis ejusdem: tum hæc tria in
 vas aqua plenum seorsim immittens, aquam inde
 effluentem sedulo exploravit, atque hinc quantum
 argenti in ea corona fuerit admixtum, invenit.

Fingamus igitur corona pondus fuisse lib. 12,
 item auri, & argenti massas; & dum corona in
 vas aqua plenum demitteretur, effluisse aquæ li-
 bras $7\frac{1}{2}$, dum autem immergeretur auri massa,
 effluxisse aquæ libras $7\frac{1}{2}$, immersa demum ar-
 genti massa, effluxisse aquæ libras $10\frac{1}{2}$. Jam ex
 regula duplicis positionis ponatur, in ea corona
 fuisse auri lib. 9, erant ergo argenti lib. 3. Ita-
 que per regulam proportionum dic, si puri auri
 lib. 12.

lib. 12 dant aquæ libras $7\frac{1}{2}$, quid lib. 9? invenies lib. $5\frac{1}{2}$. Item, si puri argenti lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{1}{2}$, quid lib. 3? proveniunt lib. $2\frac{1}{10}$. Adde simul libras $5\frac{1}{2}$, & $2\frac{1}{10}$, habentur aquæ lib. $8\frac{1}{10}$, debebant autem esse lib. $7\frac{1}{2}$; est ergo error per excessum $\frac{1}{10}$, qui notetur cum signo + una cum positione assumpta 9.

Ponatur secundo in eadem corona fuisse auri lib. 8, ergo ex argento erant lib. 4. Dic igitur per regulam auream, si auri puri lib. 12 dant aquæ lib. $7\frac{1}{2}$, quid lib. 8? inveniuntur lib. $4\frac{1}{2}$. Similiter, si argenti puri lib. 12 dant aquæ lib. $10\frac{1}{2}$, quid lib. 4? proveniunt per regulam proportionum aquæ lib. $3\frac{1}{2}$. Adde simul lib. $4\frac{1}{2}$, & $3\frac{1}{2}$, fit summa librarum aquæ $8\frac{1}{2}$, debebant autem esse lib. $7\frac{1}{2}$. Peccatum est igitur rursus per excessum $\frac{1}{2}$, seu $\frac{5}{10}$, qui notetur cum + juxta positionem 8, ut sequitur.

$$\begin{array}{l} \text{Posit. } 9, \text{ Err. } + \frac{1}{10} \\ \text{Posit. } 8, \text{ Err. } + \frac{5}{10} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Posit. } 9, \text{ Err. } + \frac{1}{10} \\ \text{Posit. } 8, \text{ Err. } + \frac{5}{10} \end{array}} \right) \frac{1}{10} \text{ differ.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Prod. } 9 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \\ \quad 8 \times \frac{5}{10} = \frac{40}{10} \\ \text{Differ. } \frac{9}{10} = 3 \end{array}$$

Ductis jam $9 \times \frac{1}{10}$, & $8 \times \frac{5}{10}$ habentur $\frac{9}{10}$, & $\frac{40}{10}$; quorum differentiam $\frac{31}{10}$, seu 3, divide per differentiam errorum, hoc est per $\frac{1}{10}$, quotus $\frac{31}{10}$, seu 31, dat auri libras quantitas. Erant ergo immixtae 2 argenti librae.

Ut fiat examen dic, si auri lib. 12. dant aquæ lib. 7

lib. $7\frac{1}{2}$, quid lib. 10? inveniens lib. 6. Item si argenti lib. 12 dant aquæ lib. 10? quid lib. 2? invenies lib. $1\frac{1}{2}$. Adde igitur 6, & $1\frac{1}{2}$, summa librarum $7\frac{1}{2}$ dat tantum aquæ, quantum dum corona immergeretur, effluxit.

Schol. I. Sed nota non opus fuisse Archimedi, aut cuiquam alteri, qui experimentum hujusmodi facere velit, conficere auri, vel argenti massas ejusdem ponderis cum corona; sed satis esse aliquam auri, & argenti portionem noti ponderis assumere, ut habeatur inter auri, ac argenti pondus, & aqua effluentis quantitatem proportio.

Schol. II. Per regulam duplicis positionis alie plures. questiones pulcherrimæ solvi possunt; quæ tamen longe facilius, & universali modo per Algebram expediuntur: a qua pariter peti debet Propositionis hujus. simplex, ac genuina demonstratio; ut videre est apud Bernardum Lamy in Elementis Mathematicis ann. 1704 edit. Paris. pag. 358. Demonstrationes autem aliunde petite prolixæ sunt admodum, & implicatæ, quas proinde nos prætermittimus.

PROPOSITIO X.

Datis duobus numeris, tertium proportionalem invenire.

DUc secundum in seipsum, & productum divide per primum, quotus erit tertius proportionalis quaesitus. Dati sint 2. & 18; quibus tertius

tius proportionalis inquiritur. Ducatur 8×8 , & productum 64 dividatur per 2 ; quotus 32 est numerus quæsitus. Sic 2 , 8 , 32 , sunt in eadem proportione subquadrupla. Ratio patet *ex 1. lem.*
 Schol. Si numeri dati sint inter se primi, hoc est unus non sit alterius multiplex, tertius proportionalis non erit numerus integer, sed fractus. Sic datis 2 & 5 invenitur per hanc Prop. tertius proportionalis $\frac{25}{2}$, hoc est $12 \frac{1}{2}$.

P R O P O S I T I O X I.

Inter duos numeros datos medium proportionalem invenire.

Medius proportionalis inter duos numeros datos dicitur numerus, qui ita se habet ad alterum datum, sicut alter datorum ad ipsum; ita ut numeri dati sint extremi, & ipse medius, qui bis sumitur, semel ut consequens respectu primi, & semel ut antecedens respectu alterius.

Dati sint numeri 4 & 16 , inter quos medius proportionalis quæritur. Duc illos inter se, & ex producto extrahe radicem quadratam, radix erit medius proportionalis. Sic $4 \times 16 = 64$, cujus radix quadrata est 8 per Propof. 2. Cap. 5. Sunt igitur 4 , 8 , 16 continue proportionales, nam. $4 : 8 :: 8 : 16$. Ratio patet *ex 1. lem.*

Schol. I. Si productum ex numeris datis non sit quadratum, ita ut radix quadrata ab eo erui non possit sine residuo; tunc medius proportionalis inve-

niri, nullo modo potest. Nam dati numeri sint v. g. 2 & 5, radix quadrata per Prop. cit. & Schol. 2. erit $3\frac{1}{2}$. Adeoque erunt in continua proportione 2, $3\frac{1}{2}$, 5, quod est falsum, nam si reducuntur ad idem nomen, erunt $\frac{2}{1}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{10}{6}$, seu 12, 19, 30, qui nullo modo sunt proportionales, ut patet.

Schol. II. Cum omne quadratum intelligi possit multiplicatum esse per unitatem, hic omnis radix quadrata erit media proportionalis inter unitatem, & ipsum quadratum. Sic 25, radix quadrata numeri 625, est media proportionalis inter 1 & 625, proinde 1, 25, 625 sunt in eadem ratione continua. Nam 1. 25::25. 625.

PROPOSITIO XII.

Inter duos numeros datos duos medios proportionales invenire.

Quadratum unius extremi ducatur in alterum extremum, & ex productis extrahatur radix cubica per Prop. 3. Cap. 5., quaerit duorum mediorum proportionalium prior. Dende quadratum alterius extremi ducatur in alterum extremum, & ex producto pariter extrahatur radix cubica, quaerit duorum mediorum proportionalium posterior.

Dati sunt numeri 2 & 16, quos inter invenire oporteat duos medios proportionales. Quadratum enim numeri 2, ejusque quadratum 4 duc

in

in 16, fiunt 64, cujus radix cubica 4 erit prior duorum proportionalium, Similiter quadratum alterius numeri 16, nempe 256, duc in 2, fiunt 512, cujus radix cubica 8 erit duorum proportionalium posterior, proinde 2, 4, 8, 16 sunt in continua proportione, ut patet, cum sit 2 ad 4, ut 4 ad 8, ut 8 ad 16.

Schol. Si ad numerum datum, & primum medium proportionalem inventum, queratur tertius proportionalis per Propof. 10. hujus; vel si inter medium proportionalem inventum, & alterum numerum datum inveniatur medius proportionalis per Propof. 11. hujus; in utroque casu obtinebitur secundus duorum mediorum proportionalium quaesitus. Ceterum si numeri dati sint tales, ut inde radix cubica obtineri non possit sine fractionibus, tunc medii proportionales inveniri nequeunt, ut de uno medio proportionali dictum est in Schol. 1. Propf. praec.

PROPOSITIO XIII.

Questiones aliquot practicae expediuntur.

ET si quaestiones fere omnes, quae sequuntur, ex regulis proportionum jam explicatis facile resolvi possint; quia tamen eas ordinare, atque expedire tyronibus negotium facessit, adeoque Arithmetici practici peculiare de his tractatus instituerunt, proinde nos praecipuas breviter indicabimus, ita tamen ut ex ipsa praxi operandi etiam methodus innotescat.

1. Marcellus debet Titio scuta Romana 34329

Q 2

Ce-

124 DE REGULIS ARITHMETICIS

Cedit illi domum, quæ locari solet annuis scütis 53 $\frac{2}{7}$, possidendam, donec debitum sit omnino solutum, quæritur quot annis eam Titus possidebit.

Dividatur sc. 3432 per sc. 53 $\frac{2}{7}$ (reductis integris cum fractione ad fractionem ejusdem nominis) invenientur anni 63, menses 11, dies 12, quod per se manifestum est.

2. Impendit Paulus scuta Romana 415. 35. in libras 385. mercis cujusdam coemendas, unde lucrari cupit scuta 50. 50, quæritur quanto singulas libras vendere debeat.

Addantur simul emptæ mercis pretium, & lucrum inde faciendum, nempe 415. 35 + 50. 50 = 465. 85, quæ quidem summa dividatur per numerum librarum 385, quotus dat unius libræ pretium. Scilicet sc. 1 : 21.

3. Lucilius vendidit aureis 9072 fundum, quem emerat aureis; 8400; quærit quantum ex singulis 100 lucratus sit?

Dic per regulam proportionum si 8400 fiunt 9072, quid 100? Invenies 108. Fuit ergo ex singulis 100 lucrum aureorum 8.

Vel sic, subtrahe 8400 ex 9072, differentia, seu lucrum est aureorum 672. Dic ergo, si 8400 dat 672, quid 100? invenies 8, ut antea.

Examen fit fidicas, 100 fiunt; 108; quid 8400? invenies 9072.

4. Fingamus ab eodem Lucilio solvendam esse pensionem scutorum 500 annis quinque, hoc est scuta 100 singulis annis; quæm ille emit paratâ pecunia, solutis statim scütis 400. Quæritur, quare

quantum lucri ex singulis 100 percipiat,

Dic per regulam auream, si scuta 400 fiunt 500, seu per Prop. 4. *bujus*, si 4 fiunt 5, quid 100? invenies 125; adeoque ex singulis 100 habet lucrum scutorum 25.

Examem erit, si dicas 100 fiunt 125, quid 400? fiunt 500.

(Schol. I. *Questiones bujus generis pertinent ad regulas lucri, seu simplicis meriti, ut vocant.*

5. Fabius debet Sempronio aureos 660 annis tribus solvendo, hoc est singulis annis aureos 200, Paratus tamen est statim aureos 660 creditori solvere, siquidem 10 ex singulis 100 sibi relaxet. Queritur, quot aureos solvere debeat.

Adde lucrum 10 ad 100 fiunt 110. Tum per regulam auream ter repetendam (quot scilicet anni sunt) dic 110 fiunt 100, vel (per Prop. 4. *bujus*) si 11 fiunt 10, quid 220? fiunt 200. Rursus dic, si 11 fiunt 10, quid 200? invenies 181 $\frac{1}{11}$. Denique, si 11 dant 10, quid 181 $\frac{1}{11}$? proveniunt 165 $\frac{1}{11}$. Addantur simul 200, 181 $\frac{1}{11}$, 165 $\frac{1}{11}$. Erit summa 547 $\frac{1}{11}$. Accipiet ergo Sempronius tantum aureos 547 $\frac{1}{11}$.

Schol. II. *Nota in hac aliisque bujus generis questionibus dici non posse, si 100 fiunt 90, quid 220? Sed necessario addi debere lucrum ipsum 10 ad 100. Nam nihil aliud proponitur relaxandum, nisi lucrum; proinde lucrum ipsum additur ad sortem, seu 100, ut habetur 110, primus regula aurea terminus.*

6. Eadem ratione si quis ad tres annos domum conduxerit cum annua pensione scutorum 300, dom-

domino autem ejus domus omnem statim summam in antecessum solvat ea conditione, ut sibi scuta 5 pro singulis 100 compenset. dices, si 105 fiunt 100, seu (dividendo 105, & 100 per 5) si 21 fiunt 20, quid 300? invenies $285 \frac{1}{5}$. Rursus, si 21 fiunt 20, quid $285 \frac{1}{5}$? fiunt $272 \frac{16}{105}$. Demum si 21 dant 20, qui $272 \frac{16}{105}$? proveniunt $259 \frac{49}{105}$. Horum summa $816 \frac{22}{105}$ (reductis fractionibus in partes centesimas) in antecessum domus illius domino solvenda est.

Quod si aurei illi 660 a Fabio triennio post solvendi sint; tunc additis, ut supra 10 ad 100, dic si 110 fiunt 100, seu, per Prop. 4. bujus, si 11 fiunt 10, quid 660? erunt 600. Rursus, si 11 fiunt 10, quid 600? invenies $545 \frac{5}{11}$. Demum, si 11 fiunt 10, quid $545 \frac{5}{11}$? fiunt $495 \frac{105}{11}$; & hi solum Sempronio solvendi sunt.

Vel brevius, duc $660 \times 10 \times 10 \times 10 = 1000$, & productum 660000, divide per $11 \times 11 \times 11 = 1331$, quotus dat $495 \frac{105}{11}$, ut antea.

Schol. III. Hæc præcis vulgo dicitur, scontare a capo d'anno.

7. Accepit Cajus aures 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fenore auctio fortis. Nihil fuit a Cajo solutum toto triennio. Quæritur, quantum ipse pro sorte, atque usura usura feneratori debeat.

Adde 10 ad 100 fiunt 110; deinde per regulam auream dic, si aurei 100 fiunt 110, seu si 10 fiunt 11, quid 500? invenies 550, hoc est 500 pro sorte, pro usura vero primi anni 50. Rursus

fus pro secundo anno die, si 10 sunt 11, quid 550? sunt 605. Demum si 10 dant 11, quid 605? Invenies summa a Cajo solvendam, aureos 665 $\frac{1}{2}$.

Vel brevius, duc 500 in 1331, hoc est in $11 \times 11 \times 11 = 1331$, & productum 665500, divide per 1000, nimirum per $10 \times 10 \times 10 = 1000$, quotus dat 665 $\frac{1}{2}$, ut antea.

Coroll. Hinc liquet, sortem datam, nempe aureos 500, & summas deinde inventas per regulam proportionum 550, 605, & 665 $\frac{1}{2}$ esse terminos continue proportionales, cum omnes sint in eadem proportione, quam habet 10 ad 11, proinde inter sortem datam, & ultimi termini summam tot intercedunt medii proportionales, quot ejus fœnoris fuerunt anni uno minus. Hoc ipsum de præcedenti quæstione debet intelligi.

Schol. IV. Praxis hujusmodi, quæ apud Latinos anatocismus, sive usura usuræ, & a nonnullis usura Judaica dicitur, est a lege vetita. Ab Italis vocari solet meritum meriti, seu meritare a capo d'anno. Hac vero regula utimur, ubi fundus ex annuis fructibus continuo augetur, ac multiplicari debet.

8. Terentius debet Gellio pro usura primi anni summam sortis & fœnoris simul scuta 4608, pro quarto autem anno scuta 6561; quantum, quanta fuerit fors, quantumque fœnus.

Quærantur inter 4608, & 6561 duæ mediæ proportionales, per Prop. 12. hujus: duc scilicet minorem 4608 in se, fit quadratum, 21233664, quo ducto in majorem 6561, producitur 139314069504.

Hinc

Hinc autem extrahatur radix cubica, per *Prop. 3. Cap. 5.* prodibit 5184, quæ erit duarum proportionalium minor, per *Prop. 12. cit.* Solvet igitur secundo anno pro sorte, ac scœnore scuta 5184: atque hinc deducitur fortis quæsitæ quantitas. Nam ex *præc. Coroll.* fortis summa, & reliquæ omnes, sunt inter se in proportione continua; proinde secundi anni summa 5184 se habet ad summam 4608 primi anni, sicuti hæc ad sortem quæsitam. Datis itaque duobus terminis 5184, & 4608, quærat tertius proportionalis per *Propos. 10. hujus*, erit fors quæsitæ 4096. Hanc vero subtrahe ex summa data fortis & scœnoris primi anni, nempe ex 4608, innotescet ejusdem fortis usura, scutorum scilicet 512, seu $12\frac{1}{2}$ ex singulis 100. Nam dic, si scuta 4096 fiunt 4608, quid 100? invenies $112\frac{1}{2}$, hoc est $12\frac{1}{2}$ ex singulis centenis.

C A P U T VII.

De Progressionibus Arithmeticis, & Geometricis, earumque regulis.

Progressio est complurium terminorum eadem ratione procedentium series. Si excessus, vel defectus, quo termini illi procedunt, sit æqualis, ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. qui binario crescunt, vel 15, 12, 9, 6, 3, &c. qui ternario decrescunt, tunc oritur *progressio Arithmetica*.

Si vero termini sint in continua ratione Geometrica proportionales eo modo, quo in præcedenti capite explicatum est, tunc habetur *progressio Geometrica*. De utraque hic breviter agemus.

Datur etiam proportio Harmonica, seu Musica, in qua tres termini ita ordinantur, ut eadem sit proportio maximi ad minimum, quam habet differentia maximi & medii ad differentiam medii & minimi. Tales sunt numeri 3, 4, 6. Nam inter 6 & 3 est proportio dupla, sicuti dupla est proportio differentiarum inter 6 & 4, nempe 2, ad differentiam inter 4 & 3, nempe 1, scilicet 6. 3 :: 6 — 4. 4 — 3.

Regulæ progressionum hujusmodi consistunt in hoc, ut eorum terminorum series compendiose, & sine prolixæ calculationis tædio in unam summam colligantur.

L E M M A T A.

I. IN progressionē Arithmetica terminorum quorumcunque, summa duorum extremorum æquatur summæ duorum terminorum, qui ab extremis æqualiter distant. Sint

$$1, 3, 5, 7, 9, 11.$$

$$\text{Erit } 1 + 11 = 3 + 9. \text{ Item } 1 + 11 = 5 + 7.$$

II. In progressionē Arithmetica terminorum imparium summa extremorum, vel duorum terminorum æqualiter distantium, dupla est termini medii.

R

1, 3,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

In hac progressionē septem terminorum summa $1 + 13 = 7 + 7$, seu 14 . Item $3 + 11 = 14$, pariter $5 + 9 = 14$.

III. In omni progressionē Arithmetica quilibet terminus continet primum, hoc est minimum terminum, & toties excessum, seu differentiam unam minus, quot sunt termini post primum usque ad ipsum inclusive. Sint

1, 3, 5, 7, 9, 11.

Terminus quartus progressionis 7 continet, ut patet, minimum terminum 1, & ter differentiam 2. Pariter 9, terminus quintus progressionis, continet 1, & quater differentiam ipsam 2. Ita quoque 11, terminus progressionis sextus, continet 1, & quinquies differentiam 2, ut patet.

Coroll. Hinc habetur maximus progressionis terminus, si differentia ducatur in numerum terminorum unitate minutum, & producto addatur minimus terminus. Sic in præcedenti progressionē, si differentia 2 ducatur in 5 (numerum terminorum unitate minutum) & producto addatur minimus terminus 1, habeatur maximus terminus 11.

$$1 + 2 \times 5 = 11 \quad \text{et} \quad 3 + 2 \times 4 = 11 \quad \text{et} \quad 5 + 2 \times 3 = 11$$

PROPOSITIO I.

Datis minimo ac maxima progressionis Arithmetica terminis, & terminorum numero, invenire summam.

Regula hæc est: summa minimi ac maximi termini multiplicetur per dimidium numerum terminorum, productum dabit summam totius progressionis.

Sit exemplum. Quæritur summa omnium campanæ pulsum alicujus horologii, quod ab 1 hora usque ad 12 inclusive, det pulsus pro horis juxta naturalem numerorum seriem 1, 2, 3, 4, 5 &c., ita ut pro hora 7 septies, pro hora 10 decies, pro 12 duodecies pulset. Minimus terminus est 1, & maximus 12; horum summa 13 ducatur in 6, (dimidium terminorum) productum 78 dat omnes campanæ horariæ pulsus pro horis 12. Cujus duplum dat pulsus horarios integri unius diei.

Ratio deducitur ex *Lemm.1.* Nam cum summa extremorum æqualis sit duobus quibusque terminis æqualiter distantibus, rectangulum factum ex summa primi, & ultimi in numerum dimidium terminorum, necessario æquale erit summa totius progressionis. Multiplicatio enim est idem ac compendiosa additio ex dictis *Prop. 5. Cap. 1.*

Coroll. Hinc infertur, summam progressionis Arithmeticæ pariter haberi. Si dimidiam sum-

causa

R 2

ma

132 DE PROGRESS. ARITHMETICIS
 mæ maximi ac minimi termini ducatur in nume-
 rum terminorum. 2. Si summa maximi & mini-
 mi ducatur in numerum terminorum, & produ-
 ctum per 2 dividatur. 3. Quia vero in progres-
 sione terminorum imparium numerus medius æqua-
 tur dimidio summæ maximi ac minimi ex *Lem. 2.*
 hinc sequitur, haberi progressionis summam, si
 numerus medius ducatur in numerum terminorum
 imparium.

PROPOSITIO II.

*Datis terminis maximo, & minimo, necnon
 & numero terminorum, differentiam invenire.*

A Maximo termino aufer minimum, & residuum
 divide per numerum terminorum unitate
 minutum, quotus dabit differentiam quæsitam.

In præcedenti exemplo campanæ horariæ a ma-
 ximo termino 12 aufer minimum 1, & residuum
 11 divide per numerum terminorum unitate minu-
 tum, nempe 11; quotus 1 dat differentiam quæ-
 sitam.

Ratio desumitur ex *Lem. 3.* Nam 12 continet
 minimum terminum 1, & præterea toties conti-
 net differentiam, quot sunt post terminum 1 us-
 que ad ipsum inclusive 12 termini, qui nimirum
 sunt 11: proinde, ablato minimo termino, resi-
 duum continet toties differentiam, quot sunt pro-
 gressionis termini minus uno; adeoque diviso re-
 siduo

fiduo per numerum terminorum unitate minimum habetur differentia.

PROPOSITIO III.

Minimo termino, differentia, & numero terminorum datis, invenire

maximum.

DUc differentiam in numerum terminorum unitate minutum, & producto adde minimum terminum, summa dabit maximum.

Sic exemplum. Dux exercitus distribuere vult prædam in expugnatione Urbis collectam inter 40. strenuos milites, qui primi arcem occupaverunt; hoc pacto, ut ultimo, qui moenia superavit, dentur aurei 100, penultimo 130, antepenultimo 160, & sic deinceps quæritur, quantum retulerit pecunie primus. Patet minimum terminum esse 100, differentiam 30, & numerum terminorum 40. Duc proinde 30 in 39, & producto 1170 adde minimum terminum 100, habebis maximum 1270, præmium scilicet primi militis. Ratio patet ex

lemm. 3, ejusque Coroll.



PROPOSITIO IV.

*Minimo & maximo, necnon & differentia
datis, numerum terminorum
invenire.*

A Maximo aufer minimum, & residuum di-
vide per differentiam, quotus unitate au-
ctus dat numerum terminorum.

Sit exemplum. Empta est multitudo librorum
hac conventione, ut minimus liber stet julius 2,
secundus julius 4, tertius 6 &c. ultimi vero li-
bri pretium fuit juliorum 400, queritur librorum
numerus. Aufer minimum 2 a maximo 400, &
residuum 398 divide per differentiam 2, quotus
199 unitate auctus, hoc est 200, est numerus
terminorum, seu librorum, qui queritur.

Similiter artifex de opere perficiendo convenit
hoc pacto, ut primo die solvantur sibi asses 20,
secundo dies asses 25, tertio asses 30, & sic deinceps.
Ultimo die, quo opus absolvit, accepit as-
ses 165, queritur quot dies operi insumpserit.
Aufer terminum minimum 20 a maximo 165, &
residuum 145 divide per differentiam 5, quotus
est 29, qui unitate auctus dat dies 30.

Ratio propositionis desumitur ex *lemm.* 3., ut
manifestum est.

PROPOSITION V. 2 + 1

De Numeris Polygonis.

Numeri Polygoni sunt summæ progressionum Arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie Triangulares, si differentia progressionis sit 1; Quadrati, si differentia sit 2; Pentagoni, si 3; Hexagoni, si 4; Heptagoni, si 5 &c.

fortiuntur autem hæc nomina a figuris Geometricis, in quas disponi possunt per puncta unitatibus respondentia, ut ex Triangulæ *ABC* patet.

Progr. Arithm. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

Num. Triangulares. 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28.

Progr. Arithm. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13.

Num. Quadrati. 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49.

Progr. Arithm. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19.

Num. Pentagoni. 1. 5. 12. 22. 35. 51. 70.

Progr. Arithm. 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25.

Num. Hexagoni. 1. 6. 15. 28. 45. 66. 91.

Latus Polygoni est numerus terminorum progressionis Arithmeticæ, qui summantur, quod quidem tot continet unitates, quot numerus ipse polygonus terminos. Sic latus *BC* polygoni triangularis *ABC* continet unitates 4, & polygo-

nus

136 DE PROGRESS. ARITHMETICIS

nus numerus 10 summam quatuor terminorum

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10. \quad \circ \quad 9 \quad 8 \quad 7$$

Numerus angulorum est, qui indicat quot angulos, seu latera habeat talis in specie polygonus, ex quorum numero determinantur. Sic numerus angulorum in Triangularibus est 3, in Tetragonis 4, in Pentagonis 5. &c. Numerus vero angulorum superat semper duplici unitate differentiam progressionis generatricis, quod notetur. Ex his facile est solvere problemata, quæ sequuntur.

1. Dato latere, & numero angulorum numerum polygonum invenire. Nam esto datum latus 4, & angulorum numerus 3. Jam patet, addendos esse quatuor terminos, cum latus datum unitates quatuor contineat progressionis Arithmeticæ, cujus differentia est 1. Nam angulorum numerus 3 - 2, dat differentiam 1. Erunt ergo termini addendi 1 + 2 + 3 + 4 = 10, qui erit numerus triangularis quæsitus, sit exemplum, disponere volo in viridario aliquot flores, five arbores, in forma triangulari, ita ut in latere sint arbores 4, quæritur eorum numerus, patet 10. requiri.

2. Dato numero polygono, & angulorum numero, polyponi latus invenire. Sit polygonus datus 51, & angulorum numerus 5. Ex dictis constat differentiam seriei generatricis esse 3, adeoque polygonum datum 51 esse Pentagonum, cui in prima serie numerorum naturalium respondet latus 6. Quod manifestum est, si ejusdem seriei, cujus differentia est 3, termini 6. summentur.

Schol. Si addantur simul numeri polygoni, nempe triangularis, sive Quadrati, aut Pentagoni &c. summa dat numeros Pyramidales; qui si oriantur ex additione Triangularium, vocantur Pyramidales Triangulares. Si ex additione quadratorum, Pyramidales Quadrati: Sic si addas simul Hexagonos 1, 6, 15, 28, 45, 66, &c. invenies numeros Pyramidales Hexagonos 1, 7, 22, 50, 95, 161 &c. & sic de aliis.

De Progressionibus Geometricis.

L E M M A IV.

IN omni progressionem Geometricam si terminus quilibet in se ducatur, & productum dividatur per terminum primum progressionis, quotus distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse terminus.

In progressionem *A* terminus 8 tertio loco positus, qui duobus locis distat a primo, ducatur in se, & productum 64 dividatur per primum terminum 2, quotus 32 distabit a primo termino locis duplo pluribus, seu quatuor. Nam terminus 32 est tertius proportionalis ad duos terminos 2, & 8, per *Propos. 10. Cap. 6.* proinde 32 toties continet 8] hoc est bis terminum intermedium 16] quoties 8 continet primum 2, nempe

A 2, 4, 8, 16, 32, &c.

o. 1. 2. 3. 4.

S

bis

bis terminum intermedium 4; adeoque cum 32 tantundem distet ab ipso 8, quantum 8 a termino primo 2 [duobus scilicet locis] distabit ipse 32 a primo termino locis duplo pluribus, nempe quatuor.

Coroll. hinc sequitur, quod si cuilibet progressionis Geometricæ subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, facto tamen initio a cyphra, quilibet progressionis terminus, qui producitur per alium in se ductum, & divisum a primo, habeat sub se notam duplo majorem, quam terminus a quo producitur. Sic in superiori exemplo terminus 22 habet sub se notam 4, duplam ejus quam habet 8, ex cujus ductu producitur. Tales enim numeri, qui *exponentes, vel indices* progressionis dicuntur, indicant, quantum quisque terminus distet a primo. Locum autem, seu numerum terminorum progressionis indicant unitate minorem. Sic 32, cujus index est 4, est quintus in progressionem terminus. Quod notetur.

L E M M A V.

IN omni progressionem geometrica si duo quilibet termini in se ducantur, & productum dividatur per primum terminum progressionis, quotus dabit terminum tot locis distantem a primo, quot unitates habent indices duorum illorum terminorum simul additi.

In Progressione Geometrica *B* subscribantur numeri ordine naturali ab unitate, ut dictum est in *præc. Coroll.* & duo quilibet termini 10 & 40, quo-

quorum indices simul additi dant 4, ducantur inter se, eorumque productum 400 dividatur per primum 5, quotus est 80, cujus index pariter est 4, adeoque quatuor locis distat a primo termino per *Coroll. cit.*

B 5, 10, 20, 40, 80, 160 &c.

0. 1. 2. 3. 4. 5.

Coroll. Hinc ad inveniendum quemlibet progressionis datæ terminum, v. g. sextum, multiplicari debent inter se duo termini, eorumque productum dividere per primum, ita ut eorum indices additi contineant tot unitates una minus, quot habet terminus quæsitus. Sic ad inveniendum sextum progressionis *B* terminum, ductis inter se 20 & 40 [quorum indices additi dant 5] & producto diviso per 5, quotus 160 erit sextus progressionis terminus, ut patet.

PROPOSITIO IV.

Datis minimo & maximo progressionis Geometricæ terminis, ac denominatore, summam terminorum invenire. + + +

A Maximo termino aufer minimum, & residuum divide per denominatorem proportionis unitate minutum, additoque quotienti ultimo termino, habebis omnium terminorum summam.

Sit exemplum, Venditur equus eximia pul-

chriitudinis hoc pacto, ut juxta clavorum numerum, qui in soleis ferreis figendis adhiberi solent, solvatur pro primo clavo 1 assis, pro secundo clavo 2 asses, pro tertio 4, & sic deinceps in proportione dupla. Clavus ultimus importat asses 2147483648. Quæritur assium omnium solvendorum summa.

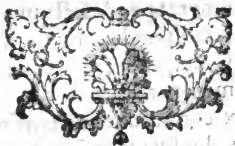
Aufer minimum terminum 1 ab ultimo, & residuum divide per denominatorem 2 unitate multatum, nempe per 1; & quia unitas non dividit, remanet quotus idem ac residuum 2147483647, cui adde ultimum terminum, fiet totius progressionis summa 4294967295: qui asses si dividantur per 100, erit pretium illius equi scutorum 42949672, & asses 95, per *Schol. Prop. 5. Cap. 3.*

Ratio deducitur ex *Prop. 34. lib. 9. Eucl.* Nam in omni serie progressionis Geometricæ, ut denominator unitatè multatus est ad unitatem, ita maximi & minimi differentia [seu maximus terminus, dempto minimo] est ad totam progressionis summam, minus ipsomet maximo termino; ut si fuerit progressio Geometrica in proportione tripla 3, 9, 27, 81, 243, erit denominator 3 unitate multatus, seu 2 ad 1, sicuti 243 — 3, seu 240, ad totam progressionis summam, dempto maximo termino, hoc est ad 3 + 9 + 27 + 81 = 120; proinde diviso 240 per 2, habetur 120, cui additur ultimus terminus 243, ut habeatur totius progressionis summa 363.

Schol. I. Progressionis dupla ab unitate incipientis brevius habetur summa, si duplicetur terminus ultimus, & a duplo auferatur unitas. Sic in priori exemplo duplica ultimum terminum 2147487648,

ac deme unitatem, residuum dabit summum totius progressionis 4294967295, ut antea. Ratio per se manifesta est, quia denominator unitate multatus est unitas, quæ non dividit; & addere quoto ultimum terminum in hoc casu idem est, ut illum bis sumere, seu duplicare.

Schol. II. Ex progressionem duplo ab 1 incipiente 1, 2, 4, 8, 16 &c. habentur numeri, qui dicuntur Perfecti, qui scilicet omnibus suis partibus aliquoties æquales sunt, ut 6, 28, 496 &c. hoc pacto: adduntur ordinatim progressionis dupla termini, donec eorum summa sit numerus primus, ut $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8+16=31$. Tam numerus primus 3, vel 7, vel 31 ducitur in numerum ultimo additum, ex producto oritur numerus perfectus. Sic $3 \times 2 = 6$, $7 \times 4 = 28$, $31 \times 16 = 496$. Et sic de aliis, qui pauci sunt, sicuti in natura alia res, quæ perfectæ dicuntur. Nam intra decem est 6, intra centum est 28, intra mille est 496, intra dena millia 8128. Omnes aut senario, aut octonario terminantur.



P R O P O S I T I O VII.

Datis aliquot progressionis Geometricæ terminis, quemcunque alium, etiam mediis non cognitis, invenire.

DAti sint aliqui termini Geometricæ progressionis A , & inveniendus sit ejusdem terminus v. gr. vigesimus. Hujus index erit 19, nimirum unitate minor numero termini quæsitæ per *Coroll. lemm. 4.* Subscribe terminis datis numeros naturales ab unitate, factæ initio a cyphra, per *Cor. cit.*, & duc 80, qui in progressionem quintum locum occupat, & distat a primo locis 4, in se ipsum, ejusque productum 6400 divide per primum terminum 5, quotus 1280 distabit a primo termino locis duplo pluribus, quam ipse 80, hoc est locis 8 per *lemm. 4.*

Eadem ratione duc 1280 in se ipsum, & productum divide per 5, quotus 327680, distabit a primo termino locis duplo pluribus, hoc est 16 per *lemm. cit.* Cum autem index 16 ab indice termini quæsitæ 19 differat per defectum 3, duc 327680 per terminum, cujus index sit 4, hoc est per 40, & productum divide per 5, quotus 2621440 erit terminus vigesimus quæsitus.

Nam cum ex constructione terminus 2621440 sit productus ex duobus terminis 327680, & 40, quorum indices sunt 16 & 3, seu 19, & divisus sit per primum terminum 5, distabit tot locis

cis

cis a primo termino, quot unitatem habent duorum illorum terminorum indices 16, & 3 *per lemm. 5.* hoc est locis 19; adeoque ejus index erit 19, proinde terminus in progressionē vigesimus *per Coroll. lemm. 4.* Quod erat &c.

Coroll. Patet idem esse quærere datæ progressionis terminum 20, ac terminum exponentis, seu indicis 19, unitate minoris termino quæsito:

P R O P O S I T I O VIII.

*Afferuntur nonnullæ Progressionis Geometricæ
quæstiones.*

I. **Q**uæritur, quantum frumenti ex uno tritici grano haberi possit annis 10, si supponatur ab uno grano produci posse singulis annis grana 100, licet revera multo plura produci soleant.

Illa ergo 100 grana secundo anno producent centies centum grana, nempe 10, 000, & sic deinceps in proportione centupla. Inveniatur hujus progressionis decimus, seu ultimus terminus, qui *per Prop. præc.* erit 10000, 0000, 0000, 0000, 0000, hoc est unitas cum cyphris 20. A quo si auferatur minimus terminus 100, messis primi anni, & residuum dividatur per denominatorem proportionis unitate minutum, hoc est per 99, & addatur quotus ultimus terminus supra inventus, erit omnium granorum summa *per Prop. 5.*

1010101010101010101010100.

Quæ

Quam nec totius Europæ horrea caperent. Ponamus enim ad unam Romanæ libræ unciam requiri grana 600; ad libræ unciarum 12 requiruntur grana 7200. Cum autem Romanum (ut vocant) Rubium sit pondo librarum 640, requiruntur ad rubium unam grana 4608000; dividatur per hunc progressionis summa, dabitur quotus rubiorum numerus.

2. Rex, qui ex annuo reddito proveniunt terdecies centena millia nummorum argenteorum, statuit ejusmodi redditus alicui ministro locare hoc pacto, ut singulis annis per unum mensem solvat sibi primo die asses 1, secundo die asses 2, tertio vero 4, in proportione dupla diebus 30, quæritur summa solvenda Regi.

Inveniatur progressionis duplæ ab 1 incipientis terminus 30 per *Propos. præc.* erit 536870912, qui duplicetur, & a duplo auferatur unitas; erit assum summa 1073741823, per *Schol. 1. Propos. 6.* Ex qua reserctis ad dexteram duabus notis, habetur nummorum argenteorum summa.

3. Scheramus Indiæ rex proposuit Sessæ Dahir Indo, qui latruncolorum ludum a se inventum illi exposuerat, ut in præmium peteret quantum vellet. Ille vero nihil aliud petiit, quam ut tritici granum prima areola positum continue duplicaretur, donec ad ultimam 64 perventum fuisset. Levissima regi primum visa res est: sed facto computo ab Arithmetiis, inventum est, neque in ejus regno, neque in toto terrarum Orbe reperiri eam tantam tritici copiam, nempe 18446744073709551616. Hoc patet ex dictis per *Prop. 6. Et 7. bujus.*

Schol. I. Hanc doctrinam qui perceperit, haud mirabitur id, quod sacra historia narrat de multitudine filiorum Israel, qui egressi sunt de Aegypto. Cum enim eo profecti essent non plures, quam 70, ita multiplicati sunt, ut post annos 120, inde exierint ad sexies centena millia bellatorum hominum, praeter pueros, senes ac mulieres.

Schol. II. Admiranda Geometrica progressionis duplæ ab 1 incipientis usque ad terminos 124 inclusive incrementa, quot scilicet sealarum gradibus Romæ ad templum Aracoelitanum ascenditur, prosecutus est integro libro Romæ edito an. 1652. Fr. Ludovicus Paris de Monte Fano Min Observ., in quo tot, ac tam lepida congerit, ut nescias, utrum magis Geometrica progressionis incrementa, an hominis ingenium, vel otium mireris.

Schol. III. De progressionem Geometrica infinita per infinitos terminos descendente non loquimur, quod hæc tyronis Arithmetici studium transcendat, & per Analysin ea longe facilius explicentur.

PROPOSITIO IX.

*Ex dato rerum numero combinationes omnes
invenire.*

Combinatio rerum fieri dicitur, cum dato certo rerum numero, v. gr. octo alphabeti literis, quaeritur quoties illæ bis, ter, vel quater inter se combinari possint: hoc est quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii ex illi fieri.

T

I. Data

146 DE PROGRESS. GEOMETRICIS

I. Datae sint igitur octo res, seu literae a, b, c, d, e, f, g, h , scire volo omnes binorum combinationes. Instituuntur duae progressionis Arithmeticae naturales descendentes, subducta unitate a numeris 8 & 2, tot scilicet terminorum, quot numerus minor 2 (qui denominator combinationis binariae dicitur) continet unitates, ut in A & B factum est. Ducantur deinde inter se A & B & productum 56 dividatur per productum 2×1 , hoc est per 2, quotus 28 dat quaesitam binorum multitudinem.

A	B
8	2
7	1
6	1
5	1
4	1
3	1
2	1
1	1
56	28

Hoc patet ex sequenti 8 literarum combinatione.

ab	ac	ad	ae	af	ag	ah
bc	bd	be	bf	bg	bh	
cd	ce	cf	cg	ch		
de	df	dg	dh			
ef	eg	eh				
fg	fh					
gh						

II. Scire volo quot ternorum combinationes ex iisdem 8 literis haberi possint. Instituuntur, ut supra factum est, duae progressionis Arithmeticae descendentes C & D , & productum 336 dividatur per productum 6, quotus 56 dat numerum ternorum, qui petitur.

C	D
8	8
7	7
6	6
5	5
4	4
3	3
2	2
1	1
336	336

Coroll.

Corol. Eadem methodo inveniuntur omnes quaternarii, quinary, senarii &c. ex dato numero. Proinde in ludo Romano, qui vulgo *Lotto* dicitur, in quo puellerum 90 nomina in urnulam mittuntur, ut inde quinque tantum sortito extrahantur, binarii *per hanc Propos.* inventi erunt 4005, ternarii 117480, quaternarii 2555190, quinary 43949268: unde difficillima in hujusmodi ludis divinandi ratio satis apparet.

PROPOSITIO X.

*Ex dato rerum numero permutaciones omnes
possibiles invenire.*

Permutatio distinguitur a combinatione in hoc, quod combinatio, dato rerum numero, ostendit quot binarii, quot ternarii, aut quaternarii &c. ex eo rerum numero fieri possint, ut ex *Prop. præc.* manifestum est. Permutatio vero docet, quoties datæ illæ quantitates permutari queant, ita ut semper omnes accipiantur, variato solum ordine. En regula.

Sumantur tot numeri in serie naturali 1, 2, 3, 4 &c. quot sunt res datæ, v. g. quinque literæ *a, b, c, d, e*, productum ex terminis seriei naturalis invicem multiplicatis erit numerus permutationum quæsitus, ut in *A & B* patet. Nam si dentur duæ tantum literæ *a, b*, possunt bis permutari, si quælibet semel primum locum, vel secundum occupet, *ab, ba*. Si vero dentur tres

T 2

a, b, c,

a, b, c , permutari possunt sexies. Quælibet enim occupare potest semel unum locum, & reliquæ duæ, ut modo dictum est, bis permutari. Nam cum c tenet ultimum locum, possunt duæ reliquæ a, b . mutari bis, ac proinde habentur duo diversi ordines abc, bac . Rursus b occupante ultimum locum, permutari possunt bis duæ a, c ; & sic duo novi exurgunt ordines acb, cab . Denique si a teneat ultimum locum, reliquæ duæ c, b bis permutari queunt, unde rursus alii duo habentur ordines bca, cba . En simul omnes trium literarum a, b, c permutationes.

$abc, acb, bca,$

$bac, cab, cba,$

Eodem discursu ostenditur literas quatuor a, b, c, d , permutationes 24 admittere, literas quinque a, b, c, d, e , permutationes 120 &c.

Corol. I. Hinc patet celebre illud carmen in honorem B. M. V.

Tot tibi Virgo dotes, quot sidera Cælo.

octo verbis constans, subire posse permutationes 40320, non tamen semper metri ratione servata.

Coroll. II. Hinc quoque habentur omnia dati nominis Anagrammata, seu quot modis, variato ordine, disponi possint alicujus vocabuli literæ, ut *Roma*; cujus anagrammata sunt *Amor, Mora, Maro, Ramo, Armo*, &c. quæ olim ex depravato ejus ætatis gustu literatores in deliciis habebant.

PRO-

P R O P O S I T I O X I .

Proponuntur aliqua Permutationum problemata.

1. **S**unt Convictores 12, qui communi mensa utuntur, & quotidie singuli accumbendi locum variant, quæritur, quot annis absolvetur isthæc locorum permutatio.

Ductis invicem 12. progressionis naturalis Arithmeticæ numeris 1, 2, 3 &c. inveniatur per *Prop. præc.* permutationes 479, 001, 600, quas si divides per dies 365 habebis annorum summam.

2. Facta literarum 24 alphabeti permutatione, quæritur, quot annorum millia necessaria erunt ad omnes ejusmodi permutationes scribendas, etiamsi mille scriptores existant, qui quotidie paginas 40 scribant, & unaquæque contineat permutationes 50.

Inveniatur per *Propos. præc.* permutationum summa ex literis 24, quæ ex Tacquet est 620, 448, 401, 733, 239, 439, 360, 000. Duc 40 X 50 X 1000, productum 2000000 dat numerum permutationum singulis diebus scribendum, quem duc in dies 365, & per productum divide prædictam permutationum summam, quotus dabit numerum annorum quæsitum.

3. Ex doctrina B. Alberti Magni de Angelorum numero, Angelorum ordines, seu chori sunt 9: quilibet chorus continet 6666 legiones, & legio

150 DE PROGRESS. GEOMETRICIS
 gio quælibet Angelos 6666, proinde omnium Angelorum numerus est 399, 920, 004; quæritur quot fieri possint Angelorum permutationes, seu quot modis ordinem inter se variare queant. In hoc tam infinitæ multitudinis numero percipiendo, imbecilla mens hominum deficit.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus numeris Arithmetica proportionalibus; tres numeros Harmonice proportionales invenire.

1. **D**ucatur primus Arithmetice proportionalis datus in secundum, productum erit primus proportionalis Harmonice.

2. Ducatur idem primus Arithmetice proportionalis in tertium, proveniet secundus Harmonicus.

3. Denique secundus Arithmeticus in tertium ductus tertium Harmonicum producet.

Sit exempl. Proportio Arithmetica 2, 3, 4,
 efficit Harmonicam 6, 8, 12.

Similiter proportio Arithmetica 3, 7, 11,
 efficit Harmonicam 21, 33, 77.

PRO.

P R O P O S I T I O XIII.

*Datis duobus numeris tertium Harmonice
proportionalem invenire.*

DUc primum numerum datum in secundum, & productum divide per duplum primi minus secundo, hoc est per differentiam dupli primi a secundo, quotus erit tertius harmonice proportionalis.

Dati sint 3 & 4, quæritur tertius in eadem ratione harmonica. Duc 3×4 , & productum 12 divide per $6 - 4$, hoc est per 2, quotus 6 dat numerum quæsitum. Similiter dati sint 6 & 8, quæritur tertius harmonicus. Duc 6×8 , & productum 48 divide per $12 - 8$, seu 4, quotus 12 est tertius harmonice proportionalis, ut patet ex dictis.

Quod si primi termini duplum sit æquale, vel minus secundo termino, tunc tertius harmonice proportionalis inveniri non poterit; ut si dentur 3 & 6, vel 2 & 6.

P R O P O S I T I O XIV.

Si numerus datus dividatur per numeros Arithmetice proportionales, quotientes erunt in Harmonica proportione.

Datus sit numerus ex.gr. 60, qui dividatur per numeros Arithmetice proportionales 1,

2, 3,

2, 3, 4, 5, 6, erunt quoti 60, 30, 20, 15, 12, 10: quos esse in proportione harmonica manifestum est. Nam

$$60. 20 :: 60 - 30. 30 - 20.$$

$$30. 15 :: 30 - 20. 20 - 15.$$

$$20. 12 :: 20 - 15. 15 - 12.$$

$$15. 10 :: 15 - 12. 12 - 10.$$

Hinc patet haberi progressionem terminorum harmonice proportionalem.

Schol. I. *Harum trium propositionum demonstrationes ad Analysin speciosam remittimus, unde facillime eruuntur, quæ alioquin per viam syntheticam sunt operosæ.*

Schol. II. *Ratio autem cur tales numeri proportionem harmonicam, seu Musicam constituere dicantur, est nimirum quia consonantias Musicas constituunt. Sic in numeris harmonice proportionalibus 3, 4, 6 inter 6 & 4 est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ Diapente, seu Quinta dicitur. Item inter 4 & 3 est proportio sesquitercia, constituens consonantiam, quam Diatesseron, seu Quartam vocant. Deinde interextremos 6 & 3 habetur proportio dupla, quæ Diapason, seu Octavam consonantiam efficit.*

Schol. III. *Datur etiam proportio Contrharmonica, quæ habetur cum datis tribus terminis, differentia primi, & secundi est ad differentiam secundi & tertii, ut tertius terminus ad primum. Sic 3, 5, 6 sunt numeri contrharmonice proportionales: nam 2, differentia primi & secundi termini,*

mini, est ad 1, differentiam secundi & tertii, ut 6 ad 3. Item 12, 10, 6 sunt contrharmonice proportionales; nam $2. 4 :: 6. 12$. Hæc dicta sint in gratiam eorum, qui musicam amant, aut instrumentis Musicis student, ut hinc numerorum scientiam sibi maxime necessariam intelligant.

C A P U T VIII.

De Logarithmis, eorumque natura, atque usu

CUM triangulorum resolutio, quæ per sinus, tangentes, & secantes habetur, ab solvi debeat per regulam Proportionum. in qua multiplicatio, & divisio, ob numeros septem, vel octo characteribus constantes, multum laboris, & tædii importare solet; hinc est, quod Joannes Neperus Scotus, vir nunquam satis laudandus, alios numeros pro sinibus, tangentibus, & secantibus excogitavit, & ann. 1620 promulgavit, quorum ope sola additio præstat omne, id, quod præstare solebat multiplicatio, & subtractio idem efficit, quod divisio. Tales numeri vocantur *Logarithmi*, quorum naturam, proprietates, & usum hic brevissime explicamus.

L E M M A T A.

I. IN progressione Arithmetica quatuor terminorum summa duorum extremorum æquatur mediolorum summæ. Sint quatuor termini dati 1, 2, 3, 4; erit $4 + 1 = 2 + 3$.

Coroll. I. Hinc ut habetur quartus Arithmetice proportionalis, ex summa secundi, & tertii termini, aufertur terminus primus, residuum dat quartum Arithmetice proportionalem quæsitum.

II. In progressione Arithmetica trium terminorum, summa duorum extremorum æquatur duplo termini medii. Dati sint 2, 5, 8, erit $2 + 8 = 10 = 5 + 5$

Coroll. I. Hinc datis duobus terminis Arithmetice proportionalibus, ut habetur tertius, ex duplo secundo aufertur primus. Sic $10 - 2 = 8$.

Coroll. II. Inter duos datos numeros medius Arithmetice proportionalis habetur, si accipiatur eorum summæ semissis. Sint dati 2 & 8, eorum summæ semissis 5 est medius Arithmetice proportionalis, ut patet.

P R O P O S I T I O I.

De natura Log-morum, eorumque inventionem.

Log-mi sunt numeri Arithmetice proportionales adjuncti, seu respondentem numeris Geometricæ proportionalibus: vel sunt numeri, qui Arithmetica, ubi ii, quorum isti sunt Log-mi,

V

Geo-

Geometricam servant proportionem. Ut si concipiatur series quæcunque numerorum Geometricæ proportionalium, ut in *A*, cui respondeat alia series numerorum Arithmetice proportionalium *B*, vel *C*, vel *D*, qui crescant ut in *B* & *C*, vel decrescant, ut in *D*; omnes hi numeri *B* & *C*, *D* dicuntur Log-mi numerorum in *A* existentium,

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>M</i>	<i>N</i>
1	1	0	100	1	0. 0000000
2	2	5	90	10	1. 0000000
4	3	7	80	100	2. 0000000
8	4	9	70	1000	3. 0000000
16	5	11	60	10000	4. 0000000
32	6	13	50	100000	5. 0000000
64	7	15	40	1000000	6. 0000000
128	8	17	30	10000000	7. 0000000
156	9	19	20	100000000	8. 0000000
512	10	21	10	1000000000	9. 0000000
1024	11	23	0	10000000000	10. 0000000

Quamvis autem Log-morum species possit assumi ad libitum, ut diximus, præstantissima tamen, & commodissima est illa, quæ cyphram, seu 0 ponit pro Log-mo unitatis, & unitatem cum aliquibus cyphris, nempe 8, vel septem pro Log-mo numeri denarii, ut vides in *M* & *N*. Adduntur numeris in progressionem Arithmetica procedentibus, seu Log-mis illæ cyphræ, ut Log-mi magis exacti habeantur, ut dicitur in Trigonometria de sinu toto respectu sinuum, tangentium, & secantium, utque calculus facilius evadat.

Coroll. I. Ex eo quod Log-mus unitatis sit, 0, sequitur Log-mum numeri, qui sit minor unitate, ut sunt fractiones, minorem esse quam 0, qui proinde dicitur Log-mus *defectivus*, & designatur nota—

Coroll. II. Omnes Log-mi numerorum ab 1 ad 10 exclusive habent 0 pro prima nota, qui sunt inter 10, & 100 habent pro primo numero 1; qui vero sunt inter 100, & 1000, habent pro primo termino numerum 2, qui inter 1000, & 10000 habent 3 pro primo termino, & sic deinceps. Hi numeri initiales 1, 2, 3, 4, 5, &c. dicuntur *characteristici*, sive *indicativi*: nam indicant quot figuris constat numerus absolutus, cuius sunt Log-mus, & puncto ab aliis separantur.

Coroll. III. Characteristica semper unitate minor est numero figurarum numeri absoluti. Hinc dato quovis numero absoluto v. g. 82050 quinque figurarum, statim intelligitur ejus Log-mo deberi 4 pro characteristica, & sic de aliis.

P R O P O S I T I O III.

Si Log-mus unitate sit 0, erit Log-mus facti æqualis aggregato ex Log-mis factorum.

SIT factum 24, cujus factores sunt 4 & 6, erunt quatuor termini Geometricè proportionales, ex *Defin. multiplicat.*, 1. 4::6. 24. eorumque Log-mi erunt in proportione Arithmetica, ex *Prop. 1.* Sed Logmi extremorum 1, 24, aequan-

æquantur Log-mis 4. 6, per lem. I. Log-mus autem unitatis ex hypotesi est 0; ergo si Log-mus unitatis sit 0, Log-mus facti æquatur summæ ex Log-mis efficientium 4 & 6. Quod &c.

Coroll. II. Hinc sequitur, Log-mum numeri compositi plani, seu solidi æqualem esse aggregato ex Log-mis laterum tale planum, vel solidum efficientium. Sic Log-mus 72 æquatur summæ Log-morum 3 & 24, aut 6 12, aut 8 & 9, vel 3, 4 & 6, vel etiam 2, 3 & 12, ex quibus omnibus confurgit numerus 72.

Coroll. II. Sequitur etiam, Log-mum numeri quadrati duplum esse Log-mi ejus radice, & Log-mum cubi triplum Log-mi suæ radice: nam factores quadrati, & cubi sunt idem numerus bis, vel ter sumptus.

Coroll. III. Si Log-mum dignitatis cujuscunque x^n , x^m , x^p , &c. divides per exponentem talis dignitatis, nempe per 2, vel 3, vel 4 &c. habebis Log-mum radice ejusdem dignitatis. Contra si Log-mum datæ radice multiplices per exponentem alicujus dignitatis, habebis Log-mum ejusdem dignitatis. Sit $x^1 = 8$, ejusque Log-mus ex tabulis 0.9030906: divide per exponentem 3 hunc Log-mum, quotus 0.3010300 erit Log-mus respondens radice 3; si vero Log-mum 0.3010300 multiplices per exponentem 3, habebis 0.9030906 Log-mum dignitatis x^3 , seu cubi 8.

P R O P O S I T I O III.

Si Log-mus unitatis est 0, differentia Log-morum duorum numerorum æquatur Log-mo quoti eorundem numerorum.

SInt duo numeri 24 & 6, & differentia eorum Log-morum fit 0.6020600, dico hanc esse Log-mum quoti eorundem, nempe 4. Nam cum sit divisor ad dividendum, *ex Defn. divis.*, ut unitas ad quorum, erunt quatuor termini Geometricæ proportionales 6. 24: .1. 4, eorumque Log-mi in proportione Arithmetica; ergo *per lem. 1. hujus*, Log-mi numerorum 24, & 1 æquantur Log-mis extremorum 4 & 6; sed ex hypothefi Log-mus unitatis est 0, ergo si ex Log-mo numeri 24 auferatur Log-mus divisoris 6, Log-mus residuus, seu differentia Log-morum 24 & 6, erit æqualis Log-mo quoti, nempe 0.6020600, qui respondet numero 4, nempe quoto. Quod &c.

Coroll. Hinc habetur, summa Log-morum divisoris, & quoti æqualem esse Log-mo dividendi.

P R O P O S I T I O IV.

Numeri cujuscunque Log-mum invenire.

INveniendos fit Log-mus numeri 7. Statuatur progressio Geometrica 1, 10, 100, 1000 &c. & assumitur Log-mi his terminis respondentes 0.0000000, 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000 &c.

eo

eo modo, quo dictum est in *Propos. I. hujus*.
 Deinde unitatem *A*, & denarium *B* auge tot cy-
 phris, quot placue-
 rit, ut 7, 8, 9 &c.
 (hic cyphræ 6 ad-
 duntur) & inter *A*
 & *B* invenitur me-
 dius proportionalis
 Geometricus *C*, per
Propos. II. Cap. 6.
Aritbm. erit hic mi-
 nor numero septena-
 rio, qui etiam intel-
 ligi debet auctus tot
 cyphris, quot aucta
 fuit unitas, nempe
 sex. Inveniatur ergo
 inter *C* minorem, &
B majorem alius
 Geometricæ propor-
 tionalis *D*, per *Prop.*
cit., qui pariter cum
 sit minor, quam
 7. 000000, poterit
 inter ipsum *D* mi-
 norem, & *B* majo-
 rem inveniri medius
 Geometricæ propor-
 tionali *E*, nempe
 7.498942, qui major
 est ipso 7. 000000;
 ideo-

A	1.000000	0.000000
C	3.162278	0.500000
B	10.000000	1.000000
—		
C	3.162278	0.500000
D	5.623413	0.750000
E	10.000000	1.000000
—		
D	5.623413	0.750000
E	7.498942	0.875000
B	10.000000	1.000000
—		
D	5.623413	0.750000
F	6.493816	0.812500
E	7.498942	0.875000
—		
F	6.493816	0.812500
G	6.978306	0.843750
E	7.498942	0.875000
—		
G	6.978306	0.843750
H	7.233942	0.859375
E	7.498942	0.875000
—		
G	6.978306	0.843750
I	7.104974	0.8515625
H	7.233942	0.859375
—		
G	6.978306	0.843750
K	7.041355	0.8476562
I	7.104974	0.8515625
—		
G	6.978306	0.843750
L	7.009760	0.8457031
K	7.041355	0.8476562

ideoque inter ipsum E , & proxime minorem D inveniatur medius Geometrice proportionalis F , qui minor est ipso E ; proinde inter F & E inveniri potest medius G , qui adhuc minor est ipso E . Atque eadem ratione inquirendo inter proxime majorem, & proxime minorem, inveniuntur medii Geometrice proportionales H, I, K, L, M, N &c. donec tandem occurrat medius proportionalis $Z = 7.000000$, qui nullo penitus excessu, vel defectu differt ab ipso numero septenario.

Deinde sicut inter A & B inventus fuit medius Geometrice proportionalis C , sic inter eorum Log-mos inveniatur

rem

G	6. 978306	0. 8437500
M	6. 994015	0. 8447266
L	7. 009760	0. 8457031
---	---	---
M	6. 994015	0. 8447266
N	7. 001883	0. 8452148
L	7. 009760	0. 8457031
---	---	---
M	6. 994015	0. 8447266
N	6. 997936	0. 8449707
O	7. 001883	0. 8452148
---	---	---
O	6. 997936	0. 8449707
P	6. 999915	0. 8450928
N	7. 001883	0. 8442148
---	---	---
P	6. 999915	0. 8450928
Q	7. 000899	0. 8451538
N	7. 001883	0. 8452148
---	---	---
P	6. 999915	0. 8451233
R	7. 000407	0. 8451233
Q	7. 000899	0. 8451538
---	---	---
P	6. 999915	0. 8450928
S	7. 000161	0. 8451233
R	7. 000407	0. 8451233
---	---	---
P	6. 996915	0. 8450928
S	7. 000038	0. 8450928
T	7. 000161	0. 8451080
---	---	---
P	6. 999915	0. 8450928
V	6. 999915	0. 8450966
T	7. 000038	0. 8451004
---	---	---
V	6. 999977	0. 8450966
X	6. 000007	0. 8450985

-02.1

medius Arithmetice
proportionalis, per
Coroll. 2. lemm. 2.,
nempe 0.500000.
Erit hic Log-mus
ipsius numeri C. Eo-
dem modo reperiri
debent omnes alii
Log-mi mediis Geo-

T	7.000038	08.451004
V	6.999977	0.8450966
Y	6.999992	0.8450975
X	7.000007	0.8450985
Y	6.007002	0.8450975
Z	7.000000	0.8450980
X	7.000007	0.8450985

metricæ proportionalibus *D, E, F, G* &c. re-
spondentes: quo facto, habebis Log-mum nu-
meri dati 7, nimirum 0.8450980.

Coroll. Hac methodo inveniuntur Log-mi nu-
merorum primorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 &c.
Supperunt tamen modi, quibus tantus labor im-
minuitur. Nam invento Log-mo numeri v.g. 6. si
hunc divides, semissis dat Log-mum numeri 3,
per *Coroll. 2 & 3. Propos. 2. bujus.* Item invento
Log-mo numeri 6, habetur Log-us numeri, 2 nam
si divides 6 per 3, quotus est 2; subtracto igitur
Log-mo numeri 3. a Log-mo numeri 6, residuum
dat Log-mum quoti 2, per *Prop. 3. bujus.* Pariter
subtrahendo Log-mum numeri 2 modo inventum a
Log-mo numeri 10, habetur Log-mus quoti 5, per
Prop. 3. cit., & sic proportionaliter de aliis.

Corol. Inventis Log-mis numerorum primorum,
facile habentur Log-mi numerorum composito-
rum. Nam si Log-mum binarii duplex, triples, qua-
druples &c. habebis Log-mot totius seriei 2, 4, 8,
16, 32, &c. si idem facies cum Log-mo ternari-
rii, habebis seriem Log-morum pro numeris 3,

08.451004

X

9,

9, 27, 81, 243 &c. Immo cum omnis numerus compositus oriatur ex multiplicatione numerorum primorum, quorum Log-mi supponuntur jam cogniti; si addas eorum Log-mos, habebis Log-mos omnium numerorum compositorum *per Prop. 2. hujus*. Hinc omnes numeri in ratione decupla eundem habent Log-um, præter characteristicam, ut vides in *A* & *B*.

<i>A</i>		<i>B</i>	
1	0.0000000	3	0.4771212
10	1.0000000	30	1.4771212
100	2.0000000	300	2.4771212
1000	3.0000000	3000	3.4771212

Schol. I. Canonem Log-morum pro numeris naturalibus, seu absolutis ab 1 usque ad 20000, & a 90000 usque ad 100000 primus construxit Henricus Briggs Anglus in Academia Oxoniensis ex consilio Jo: Neperi primi horum inventoris. Lacunam inter 20000 & 90000 mox implevit Adria-nus Ulaeq. In tabellis tamen vulgaribus habetur tantum canon Log-morum pro numeris ab 1 usque ad 10000.

P R O P O S I T I O V.

*Multiplicare duos numeros, qui minores
sint quam 10000.*

Sint multiplicandi inter se duo numeri 44, & 64, quorum Log-i ex tabulis 2. 1583625, & 1.8061800

1.8061800, quæritur factum. Adde simul duos Log-mos inventos, summa dabit Log-mum 3.9645425, cui in tabulis respondet numerus 9216 pro facto duorum numerorum 144, & 64.

Demonst. patet ex Prop. 2. hu-us.

Schol. Si summa duorum Logarithmorum superet 4.0000000, qui est maximus communium tabularum Log-mus, operandum erit, ut inferius docebimus.

P R O P O S I T I O VI.

Numerum integrum minorem, quam 10000 per alium dividere.

SIt numerus dividendus 9216, cujus Log-mus ex tabulis est 3.9645425. Divisor sit 64, cujus Log-mus est 1.8061800, quæritur quotus. E Log-mo dividendi subtrahæ Log-mum divisoris, Log-mus residuus, nempe 2.1583625, in tabulis quæsitus dat quotum 144.

Demonst. patet ex Prop. 3. hujus.

Schol. Cum Log-mus ille residuus non invenitur in tabulis præcise, signum est, quoto minorem aliquam adhaerere, quæ quanta sit, reperietur, ut non docebimus.



PROPOSITIO VII.

Datis tribus numeris quartum proportionalem invenire.

Sint dati tres numeri 4, 68, & 3, quæritur quartus proportionalis. Log-mus secundi addatur Log-mo tertii, & a summa subtrahatur Log-mus primi, Log-us residuus dat in tabulis numerum quæsitum.

Demost. patet ex lemm. I.

PROPOSITIO VIII.

Invenire Log-mum pro numeris majoribus, quam in canone continentur, sed numerum 10, 000, 000 non excedentibus.

SIT numerus datus 923754, cujus Log-mus quæritur.

1. Quære ex tabulis Log-mum quatuor primarum figurarum 9237, & ex residuis figuris fiat fractio, cujus denominator erit 1, cum tot cyphris, quot sunt ipsæ figuræ residuæ, nempe $\frac{17}{100}$.

Log-mus jam inventus subtrahatur a Log-mo proxime sequenti, nempe a Log-mo numeri 9238.

Num. 9238, Log. 3.9655779

Num. 9237, Log. 3.9655309

Diff. Log. — 470

3. Dic jam per regulam Proportionum, ut fractionis denominator 100 ad numeratorem 54, ita differentia Log-morum 470 ad quartum proportionalem 253 $\frac{54}{100}$.

4. Adde 253 (fractio negligi potest) Log-mo primum invento, fiet Log-mus 3.9655562.

5. Tandem characteristica tot unitatibus augeatur, quot sunt cyphræ in divisore (ut hic 2) erit Logmus quæsitus 3.9655562.

Demonstr. Certum est, quod si numerus 9237 cresceret integra unitate, ejus Log-mus augeri deberet partibus 470, qualis est differentia duorum Log-morum se integra unitate superantium: sed crescit tantum $\frac{22}{100}$, nam divisus per 100, quotus est 9237 $\frac{22}{100}$; ergo per regulam proportionum inquirendum est, quantum augeri debeat Log-mus ejusdem numeri 9237 ratione earum partium $\frac{22}{100}$, quæ quidem minus sunt, quam integra unitas, seu $\frac{100}{100}$. Instituta itaque regula proportionum, invenitur Log-mum primo inventum, nempe 3.9655309, augendum esse partibus 253, fitque Logarithmus 3.9955562 pro numero 9237 $\frac{22}{100}$.

Demum characteristica 3 augeri debet tot unitatibus, quot cyphræ fuerunt in divisore (ut hic 2) ob divisorem 100. Nam numerus datus cum divisus sit per 100, est numerus quotus sed *per Coroll. Prop. 3. hujus*, summa Log-morum divisoris & quoti æqualis est Log-mo dividendi; ergo ut habeatur Log-mus dividendi 923754, addi debet Log-mo quoti 3.9655562 Log-mus divisoris 100, nempe

2.000000,

2.000000, quod, ut compendiosius fiat, satis est augere characteristicam duabus unitatibus, ut patet.

Coroll. I. Si daretur numerus major, quam 10,000,000 (quod in praxi vix contingit) hæc regula non sufficeret. Nam crescentibus numeris absolutis, differentie Logarithmorum decrescunt, ita ut tandem evanescant, & fiant omnino æquales ipsi Logarithmi. Sic numeri 2656385774, & 2656384775, qui unitate differunt, habent eundem omnino Log-mum 9.4242911, ut ex tabulis majoribus Brigii apparet. Ideoque institui non posset regula proportionum, cum desit differentia Log-morum.

Coroll. II. Si numeri maximi non valde differunt, eorum Log-mi supputati ad denarii Log-mum, 1.000000, ut in tabulis communibus factum est, sunt inter se æquales. Quapropter si daretur numerus quindecim, aut viginti figurarum, vel amplius, sufficeret pro ejus Log-mo sumere Log-mum primum decem figurarum, quod notasse valde utile erit.

Schol. Si numerus datus dividi potest per quoscunque numeros, ita ut nihil remaneat, & fiat minor quam 10000, summa Log-morum divisoris & quoti dat Log-mum numeri dati. Sit numerus datus 12456, divide per 3 fit 4152, & simul Log-mus numeri 3, nempe 0.4771212, & Log-mus numeri 4152, nempe 3.6182573, summa 4.0953785 dat Log-mum dati numeri.

Similiter fit numerus datus 98796, divide per 2 fit 49398, & hunc iterum per 2 fit 24699, & hunc per 3 fit 8233, qui minor est quam

10000;

10000; adde simul Log-mos omnium divisorum 2, 2, 3, seu (idem enim est) per Cor. 1. Prop. 1. hujus sume Log-mum numeri solidi compositi ex 2, 2, 3, iaeft 12, qui est 1.0791812, cui adde Logarithmum ultimi quoti, nempe 8233, qui est 3.9155581: summa 4.9947393 est Log-mus dati numeri 98796.

PROPOSITIO IX.

Data fractionis Log-mum invenire.

I. **S**ubtrahe Log-mum numeratoris e Log-mo denominatoris, & residuo Log-mo praeponere signum subtractionis. Sit inveniendus Log-mus fractionis

$$\text{Log. } 5. = 0.6989700$$

$$\text{Log. } 2. = 0.3010300$$

$$\text{Log. } \frac{5}{2} = 0.3979400$$

2. Si fractionis datae numerator sit major denominatoris, ut $\frac{9}{5}$ subtrahe Log-mum denominatoris a Log-mo numeratoris; residuum dat Log-mum quaesitum.

$$\text{Log. } 9. = 0.9542525$$

$$\text{Log. } 5. = 0.6989700$$

$$\text{Log. } \frac{9}{5} = 2552725$$

3. Si vero fractio data integeris adhaereat, integra

tegra reducantur in unam fractionem, & eodem modo habebitur Log-mus, ut $3\frac{2}{7}$ fiant $\frac{23}{7}$, erit

$$\text{Log. } 23 = 1.3617278$$

$$\text{Log. } 7 = 0.8450980$$

$$\text{Log. } 3\frac{2}{7} = 0.5166298$$

Similiter quæritur Log-mus numeri $354\frac{1}{4}$, reduc numerum datum ad fractionem, erit $\frac{1419}{4}$, & aufer Log-mum numeri 4 ex Log-mo numeri 1419, proveniet Logarithmus quæsitus.

$$\text{Log. } 1419 = 3.1519824$$

$$\text{Log. } 4 = 0.6020600$$

$$\text{Log. } \frac{1419}{4} = 2.5499224$$

Ratio regulæ est, quia cum fractio fit quotus proveniens ex divisione numeratoris per denominatorem, Log-mus talis quoti est æqualis, *per Prop. 3. hujus*, differentia Log-morum divisoris & dividendi, idest numeratoris & denominatoris, ideoque ubi numerator minor est denominatore, ac proinde per eum dividi non potest, Log-mus major e minori subtrahendus est: quo in casu differentia evadit negativa, & præponitur Log-mis signum negativum —. Quod &c.

Logmus integri cum fracto potest enim haberi sic. Sit numerus datus $3560\frac{1}{4}$, sume differentiam Log-morum numeri 3560. & numeri 3561 proxime sequentis, cujus prioris numeri Log-mus

est 3.5514500; secundi numeri est 3.5515720; differentia erit 1220. Dic jam per regulam proportionum, ut 4 ad 3, ita 1220 ad 915. Adde 915 ad Log-um numeri 3560, nempe 3.5514500; habebis Logarithmum integri cum fractione, sc. 3.5515415. Quod &c.

P R O P O S I T I O X.

Dato Log-mo, qui in tabulis accurate non existit, invenire numerum ei respondentem.

SI Characteristica dati Log-mi sit 0, vel 1, vel 2, mutetur in 3, & quærat inter 1000, & 10000 Log-mus, qui sit proxime minor Log-mo dato, habebitur numerus quæsitus, tot fractiones decimales adjunctas habens, quot unitates Characteristicæ accesserunt.

Sit datus Log-mus 1.9201662, qui non reperitur exacte in tabulis, Characteristica 1 fiat 3, erit 3.9201662. Quære hunc inter 1000, & 10000, invenies numerum 8320 respondentem Log-mo 3.9201233, qui est proxime minor Log-mo dato, ut patet. Numerus ergo quæsitus erit $83\frac{20}{1000}$, ob duas videlicet unitates, quibus aucta fuit Characteristica.

Si Log-mus datus habeat Characteristicam 3, & non reperiat in tabulis, ut Log-us 3.5163954, erit hæc regula.

1. Sume numerum 3283 respondentem Logarith-

C. 1

Y

mo

mo 3.5162709, qui est proxime minor Log-mo dato.

2. Subtrahe hunc Log-mum a proxime sequenti 3.5164031, & fiet differentia prima 1322.

3. Idem Log-mus proxime minor Log-mo dato auferatur ab ipfomet Log-mo dato, erit secunda differentia 1245.

4. Fiat ut prima differentia 1322 ad secundam 1245, ita denominator futura fractionis ad libitum assumptus 100, 1000 &c. ad quartum proportionalem, qui erit numerator fractionis, nempe 94. erit ergo numerus quæsitus Log-mi dati $1283 \frac{94}{100}$.

Demonstr. Eodem fere modo, quo Prop. 8. hujus. Nam differentia Log-morum prima est differentis unitatis, quæ ita se habet ad differentiam secundam, Log-mi scilicet dati, & proxime minoris, ut 100 ad quartum proportionalem 94. Sed nota, quod ideo inquiritur Log-mus datus inter 1000, & 10000, quia, ut diximus, ibi Logarithmorum differentia sunt minores, ac proinde, quæ capienda est pars proportionalis, ibi exactior habetur.

Schol. Ubi tamen in minimis scrupulosi non sumus, ad proxima satis est sumere numerum respondentem Log-mo proxime minori, & fractiones ejusmodi negligere.

P R O P O S I T I O X I

*Dato Logarithmo defectivo, numerum ei
respondentem invenire.*

Sit datus Log-mus defectivus — 0.2218488,
quæritur fractio, quæ ei respondeat.

1. Sume quemlibet denominatorem 100, vel
1000, vel 10000, e cujus Log-mo 2.0000000,
vel 3.0000000, vel 4.0000000 subtrahe datum
Log-mum defectivum.

2. Quære in tabulis numerum respondentem
Log-mo residuo 2.7781512, qui dat 600 pro nu-
meratore quæsitæ fractionis; habes ergo $\frac{600}{1000}$, seu $\frac{3}{5}$.

$$\text{Log. num. } 1000 = 3.0000000$$

$$\text{Log. def.} = - 0.2218488$$

$$\text{Log. resid.} = 2.7781512, \text{ qui dat } 600$$

$$\text{Est ergo } \frac{600}{1000}, \text{ seu } \frac{3}{5}.$$

Similiter sit Log-mus defectivus — 0.3679767,
quem subtrahe ex 4.0000000, residuum 3.6320233
in tabulis quæsitum dat 4285 pro numeratore
fractionis. Habes ergo $\frac{4285}{10000}$.

$$\text{Log. num. } 10000 = 4.0000000$$

$$\text{Log. def.} = - 0.3679767$$

$$\text{Log. resid.} = 3.6320233, \text{ dat } 4285 \text{ proxime}$$

$$\text{Est ergo } \frac{4285}{10000} = \frac{857}{2000}.$$

Demonstr. ut Propos. 9.

PROPOSITIO XII.

*Dato Log-mo. excedente Log-mum 4.0000000
numerum ei congruum invenire.*

A Dato Log-mo auferatur Log-mus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. ut scilicet residuum sit proxime minus Log-mo 4.0000000, qui est tabularum maximus.

2. Quærat^{ur} ex tabulis numerus conveniens huic residuo.

3. Numerus inventus multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, per eum nempe numerum, cujus Log-mus ablat^{us} fuit a Log-mo dato, factum est numerus quæsitus.

Sit inveniendus numerus dati Log-mi 7.8372413 ex hoc aufer Log-mum numeri 10000, hoc est 4.0000000, relinquetur Log-mus 3.8372413, cui ex tabulis respondet numerus 6874 cum fractione $\frac{5012}{10000}$, per Prop. 10. Hunc multiplica per 10000, fit numerus quæsitus 68745032.

Log. 7.8372413

Log. 4.0000000

Log. 3.8372413, qui dat 6874 $\frac{5012}{10000}$

Duc in 10000, fit 68745032.

Similiter fit datus Log-mus 8.2718416, ex quo aufer Logarithmum 4.0000000; remanet 4.2718416, qui adhuc major est, quam 4.0000000.

OXI

E re-

E residuo igitur Log-mo 4. 2818416 rursus aufer
1.0000000, remanet 3.2718416, cui ex tabulis re-
sponder numerus 1870, quem multiplica per 10000
& ulterius per 10, factum 187000000 eris numerus
quæsitus.

Demonstr. Subducere Log-mum numeri 10,
100, 1000 &c. a Log-mo dato, est idem ac nume-
rum quæsitum dividere per 10, vel 100, vel 1000
&c. erit ergo divisor 10, vel 100 &c. ad dividendum
quem voco Z, ut unitas ad quotum; ergo per Prop.
3. *bujus*, differentia Log-morum divisoris, & divi-
dendi, (hoc est in secundo exemplo Log-mus 3.
2718416) æquatur Log-mo quoti, cui ex tabulis
responder numerus 1870. Cum igitur sint propor-
tionalia 100000 ad Z, ita 1 ad 1870; duo extrema ad
invicem multiplicata æqualia sunt mediis per Propof.
16. *lib. 6. Euck.*, idest $Z = 187000000$. Quod &c.

Schol. Cum residuum ex divisione superat da-
midium divisoris, additur quoto unitas. Sic in
priori exemplo pro quoto 5031, sumitur 5032.
Nam divisus 3180000 per 632 remanet 408. Quod
pro *bujusmodi* calculis nota. Quæ sequuntur,
Trigonometriæ doctrinam supponunt.

PROPOSITIO XIII.

Dari cujuscunque Sinus Log-mum invenire.

UT Log-mi Sinum accuratiores inveniantur,
supponitur Sinus constructos fuisse ad ra-
dium saltem 1000000000, & tribus deinde ul-
timis

timis notis multatos, quales sunt communiter in tabulis Ulacq, & aliorum. Sic sinus ex.gr.grad. 5 supputatus ad Sinum totum 1000000000 est 871557427, qui in tabulis multatus repetitur tantum 871557. Cum autem Sinus quilibet considerari debeat tanquam numerus aliquis absolutus, & vulgaris, Log-mi Sinum quorumcunque habentur per *Propos. 8. hujus*. Sed ut facilior, & accuratior quoque sit eorum inventio, necesse erit ad manum habere majorem Logmorum canonem, in quo numeri naturales ad plures, quam fieri potest, notas ascendant.

Log-mi autem Sinuum respicere debent Sinus ipsos prout primo fuerunt inventi, nimirum tribus figuris longiores, quam in tabulis habeantur, respectu scilicet ad sinum totum 1000000000. Sinus itaque ex.gr.grad. 5, qui in tabulis Ulacq est 871557, habet pro suo Log-mo 8.9402960.

Pariter grad. 61.50 Sinus est 8815782, Log-mus vero 9.9452609. Ex Characteristica enim, quæ semper unitate minor esse debet numero figurarum ipsius sinus primo inventi, facile apparet, quot notas habuerit sinus antequam multaretur.

Sit inveniendus Log-mus dati Sinus gr. 23, qui supputatus ad Sinum totum 1000000000 est 3907311284. Inveniatur ex tabulis majoribus Logmorum numerus, qui respondeat quinque notis ad sinistram, cujus Log-mus est 4.5918768. Deinde, ut docuimus in *Prop. 8.*, inventa differentia Logmorum numeri 39073, & 39074 proxime sequentis, quæ est 111; dic ut 100000 ad 111, ita notæ residuæ
dati

dati Sinus 11284 ad quartum proportionalem, nempe 12, qui si addatur Log-mo jam invento 4.5918768 prodit Log-us quæsitus, hoc est 9.5918780, mutata Characteristica 4 in 9 ob decem figuras dati Sinus, atque ita reperiuntur reliqui Sinus.

Coroll. Logarithmus Sinus totius vulgo ponitur 10.0000000, ex quo si Log-musaliquis auferatur, residuum dicitur *complementum Arithmeticum*, ut si ex ipso Sinu toto 10.0000000 auferatur Log-mus Sinus grad. 23, nempe 9.5918780, residuum 0.4081220 dicitur *complementum Arithmeticum* ejusdem Sinus, quo utemur inferius.

P R O P O S I T I O XIV.

*Invenire Log-mum Tangentium,
& Secantium dati arcus.*

Tangentium, & Secantium Log-mi inveniri possunt eodem modo, quo Log-mi Sinuum, sed compendiosius habentur sic.

i. Sume Log-um Sinus dati arcus, quem adde Log-mo Sinus totius. A summa aufer Log-mum complementi ejusdem Sinus, qui habetur *per Prop. præc.*, residuus erit Log-mus Tangentis quæsitus. Inveniendus sit Log-mus Tangentis grad. 23.

$$\text{Adde Log. sin. } 23. = 9.5918780$$

$$\text{Log. sin. tot.} = 10.0000000$$

Summa	19.5918780
Log. complem.	9.9640261

$$\text{Tangen. Log.} \quad 9.6278519$$

Da

Demonstr. Patet ex *Probl. 6.* Trigonometriæ; Tacquet, in qua ostensum fuit, ita se habere Sinum complementi arcus dati ad Sinum ejusdem arcus ut Sinus totus ad Tangentem quæsitam: quæ ut inveniatur, adduntur secundus & tertius terminus, & a summa subtrahitur primus per *Prop. 7. bujus.*

2. At vero pro inveniendis Secantibus dati arcus, duplari debet Log-mus Sinus totius, & ex duplo auferri Sinus complementi ejusdem arcus, nam residuum dabit Log-mum Secantis quæsitæ. Sit exemplum. Quæritur Log-mus Secantis pro dato arcu grad. 23.

$$\text{Log. sin. tot.} = 10.0000000$$

2

$$\text{Ejus duplum} = 20.0000000$$

$$\text{Log. sin. comp.} = 9.0000000$$

$$\text{Secan. Log.} = 10.0359739$$

Demonstr. ex *Probl. 6. cit.* deducitur. Nam sunt tres termini proportionales, Sinus complementi arcus dati grad. 23, Sinus totus, & Secans quæsitæ, ut ibi ostenditur. Ut ergo habeatur tertius Arithmetice proportionalis, illis respondens, hoc est Log-mus Secantis, ex duplo secundi termini aufertur primus, per *Cor. 1. lemm. 2.*

Coroll. I. Si in Tab. non reperitur exacte Log-mus alicujus Sinus Tangentis, vel Secantis, signum est, illum præter minuta prima, continere etiam secunda, quæ si quis indagare voluerit, operabitur eo modo, quo docuimus in *Prop. 10.* pro inve-

inveniendis fractionibus . Quod si ea diligentia opus non fit, satis erit sumere gradus cum minutis primis, quæ Log-o proxime minori respondent.

Coroll. II. In Tab. Ulacq. Log-mi Sinuum non habent Characteristicam majorem, quam 9. Proinde si, calculo absoluto, ex Log-morum additione resultet Characteristica major 9, ex. gr. 10, 12, 25 &c. tunc figura prima a sinistris abjicitur, fitque Characteristica, 0, 2, 5 &c.

Coroll. III. Idem fit pro Log-morum Tangentibus, quæ gr. 45 minores sunt. A gradibus vero 45 usque ad 90 Log-orum Tangentes non habent Characteristicam majorem 13. Idcirco si, post additionem factam, Characteristica duabus constet figuris, tunc vel secunda figura excedit 3, & in hoc casu abjicitur prima, sive sit unitas, sive binarius, ut in *A*; vel non excedit, & tunc retinetur unica unitas in figura prima, ut in *B* patet.

<i>A</i>	<i>B</i>
Tang. Log. 24. 6040812	Tang. Log. 21. 2162581
fit 4. 6040812	fit 11. 2162581

Schol. I. Regula Trium etiam per solam Log-morum additionem potest absolvi, si sumatur prioris termini complementum Arithmeticum, per Cor. Prop. 13, & ad duos reliquos addatur. Dati sunt tres numeri proportionales 4, 60, 25, queritur quartus. Priori numeri 4 complementum Arithmeticum est 9. 3979400, addatur ad Log-os duorum numerorum 60 & 25, summa dabis Log-mum quæsitum.

Num. 4. Compl. Arith. 9. 3979400

Num. 60 Log. 1. 7781512

Num. 25 Log. 1. 3979400

Summa 12. 5740312

Fit (per Cor. 2.) 2. 5740312, dat in Tab. 375

Schol. II. Si Sinus totus sit primus, vel unus ex terminis regulae Trium, potest omitti; nam in primo casu est 0; & in secundo addit unitatem mox delendam.

Schol. III. Log-mi Sinuum vocantur absolute Log-mi, sed Log-mi Tangentium peculiari nomine Mesologarithmi, & Log-mi Secantium Tomologarithmi. In tabulis inveniri non solent Tomolog-mi, vel quia facile ex Log-mis Sinuum erui possunt, ut vidimus; vel quia sine ipsis calculus bene potest institui. Similiter Sinus complementi alicujus arcus dicitur etiam Sinus secundus, & ab aliis Cosinus: Tangens, & Secans complementi dicuntur Tangens, & Secans secunda, vel Cotangens, & Cosecans: quae nomina si ignorentur, auctores Trigonometrici difficile intelliguntur.

Schol. IV. Log-morum usus patet in omnem fere Mathesin. Nos pauca hic Problemata delibabimus. Plura videri possunt apud Ulacq, Cava-lerium, & alios.

P R O B L. I.

*Dati numeri quadratum, vel cubum per
Log-mos invenire.*

I. Datus fit numerus v. g. 18, cujus quadratum quæritur. Duplica numeri dati Log-mum, summa dabit Log-mum quadrati quæsit.

Num. 18, Log. 1.2552725
 1.2552725

Summa 2.5105450, dat in Tab. quadr. 324

2. Pro inveniendò ejusdem numeri 18 cubo, sume ter, seu multiplica per 3 Log-mum ipsius numeri, productum dabit Log-mum cubi quæsit.

Num. 18, Log. 1.2552725

3

3.7658175, dat in Tab. cubum 5832

Coroll. Hinc apparet ratio, cur ad extrahendam ex quocunque dato numero radicem quadratam, vel cubicam, accipiatur ex Log-mo numeri dati dimidium pro radice quadrata, aut tertia pars pro radice cubica; cum quadratum ex Log-mo bis sumpto, cubus vero ex Log-mo ter sumpto prodeat. Item quarta, quinta &c. pars Log-mi dat Log-mum pro altioribus radicibus inveniendis.

P R O B L. II.

*Inter duos numeros datos invenire quotcunque
medios proportionales.*

1. **I**Nveniendus fit medius proportionalis inter
20, & 320. Adde eorum Log-mos, dimi-
diæ summæ Log-mus dat medium proporna-
lem quæsitum 80.

Num. 20, Log. 1.3010300

Num. 320, Log. 2.5051500

Summæ Log. 3.8061800

Dimid. Log. 1.9030900, dat in Tab. 80.

Est autem $\frac{20}{80} = \frac{80}{320}$.

2. Inveniendi sint inter duos numeros datos
duo, vel tres, vel quatuor, aut plures medii
proportionales; regula generalis est: aufer Log-
mum numeri minoris ex Log-mo numeri major-
is, & hujus residui tertiam partem, si duo me-
dii quærantur; vel quartam, si tres; vel quintam,
si quatuor, adde Log-mo numeri minores, nam
summæ Log-mus dabit in Tab. medium propor-
tionalem, qui proxime consequitur numerum da-
tum minorem.

4. Ut habeantur medii proportionales reliqui,
adde summæ præcedenti eandem tertiam, vel quar-
tam, vel quintam Log-mi partem, summa dabit
in Tab. reliquos medios proportionales quæsitos,
ut exempla, quæ sequuntur, rem satis illustrent.

Signa

Signa + & - additionem, & subtractionem indicant. Q vero Log-mum quoti addendum.

4. Inveniri oporteat duos medios proportionales inter numeros datos 15 & 120.

$$\text{Num. } 120, \text{ Log. } 2.0791812$$

$$\text{Num. } 15, \text{ Log. } - 1.1760913$$

$$\text{Resid. } 0.9030899$$

$$\text{Divid. per } 3, \text{ dat } Q. 0.3010299$$

$$\text{Num. } 15, \text{ Log. } + 1.1760913$$

$$\text{Summa Log. } 1.4771212 \text{ dat in Tab. } 30$$

$$Q. \text{ Log. } + 0.3010299$$

$$\text{Summa Log. } 1.7781511, \text{ dat in Tab. } 60$$

Sunt ergo 15, 30, 60, 120, ut patet.

5. Queruntur inter numeros 20, & 1620 tres medii proportionales.

$$\text{Num. } 1620, \text{ Log. } 3.2095150$$

$$\text{Num. } 20, \text{ Log. } - 1.3010300$$

$$\text{Resid. } 1.9084850$$

$$\text{Divid. per } 4, \text{ dat } Q. 0.4771212$$

$$\text{Adde num. } 20 \text{ Log. } + 1.3010300$$

$$\text{Summa Log. } 1.7781512, \text{ dat in Tab. } 60$$

$$Q. \text{ Log. } + 0.4771212$$

$$\text{Summa Log. } 2.2552724, \text{ dat in Tab. } 180$$

$$Q. \text{ Log. } + 0.4771212$$

$$\text{Summa Log. } 2.7323936, \text{ dat in Tab. } 540$$

Sunt

Sunt ergo in continua proportione 20, 60, 180, 540, 1620. &c.
 Schol. Hæc sæva pulcherrima Log-morum praxis ob sui facilitatem & brevitatem mihi tantæ esse videtur, ut propter hanc unam, Log-morum doctrinam addiscendam, esse putem. Unum aliquem ejus usum ex innumeris, qui afferri possent, indicabimus in sequenti Probl. num. 5.

P R O B L. III.

Questiones aliquot Arithmeticae per Log-mos expediuntur.

1. **D**antur scæni scuta 500, & ex singulis 100 lucrum est scutorum 5, quaeritur quot annis ea fors duplicabitur.

Ex Log-mo numeri 100 subtrahæ Log-numm. numeri 5, Log-mus residuus in Tab. dat annos quaesitos.

Num. 100, Log. 2.0000000

Num. 5, Log. 0.6989700

Log. resid. 1.3010300, dat in Tab. 20

Quod quidem manifestum est: nam si scuta 100 anno 1 dant 5, scuta 500 annis 20 dant 500 per regulam proportionum compositam ex Prop. 2. cap. 6. Arith.

Coroll. Si tempus, quo fors illa duplicatur, ut supra tantum dividas, per 2, per 4, vel 5 &c. habebis

habebis tempus, quo fortis ejusdem dimidium, seu quarta, vel quinta pars obtinetur. Sic dividendo annos 30 per 5, quotus 4 dat tempus, quod requiritur ad lucranda ejusdem fortis quartam partem, hoc est scuta 125, ut patet.

2. Accepit Cajus aureos 500 cum usura aureorum 10 ex singulis 100 in annum ea lege, ut nisi solvat singulis annis, fiat ex fœnore auctio fortis. Nihil fuit solutum toto triennio. Quæritur quantum debeat, ut propositum fuit in *Prop. 13. Arith. num. 5.*

Cum hic 100 fiat 110, erit proportio fortis ad fortem una cum fœnore $\frac{110}{100}$, seu $\frac{11}{10}$. Auferatur numeri 10 Log-mus 1.0000000 ex numeri 11 Log-mo 1.0413927, residuum, seu Log-mus 0.0413927 erit ratio fortis ad fortem unam cum fœnore unius anni. Sumatur ergo hujus residui Log-mus toties, quot sunt anni (ut hic ter) eique addatur fortis 500 Log-mus 2.6989700; summæ Log-mus 2.8231481 in Tab. quæsitus dabit pro fortē & usura ejus triennii aureos 665 cum dimidio circiter, ut in *Prop. cit.* fuit inventum.

$$\text{Num. } \frac{11}{10} \text{ Log. } 1.0413927$$

$$\text{Log. } 1.0000000$$

$$\text{Resid. Log. } 0.0413927$$

$$\text{Anni } 3 \quad 3$$

$$\text{Log. } 0.1241781$$

$$\text{Sortis } 500 \text{ Log. } 2.6989700$$

$$\text{Summa Log. } 2.8231481, \text{ dat } 665 \frac{3205}{10000}$$

3. P4

3. Pupilli alicujus bona, quæ æstimata fuerunt scutorum 1600, accepit Hortensius pacto augendi quotannis fortem ex fructibus ad rationem scutorum 5 in singula centena. Retinuit illa annis 6, mensibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum scuta 100 fiant 105, erit proportio fortis ad fortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, seu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21 Log-mo 1.3222193, residuum 0.0211893 erit ratio fortis ad fortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 sumi debet sexies, seu duci in 6, fitque 0.1271358.

Ut habeantur menses, ac dies, dividatur Log-mus ille residuus 0.0211893 per 12, quotus 0.0017657 dat Log-mum, quinquies sumendum pro 5 mensibus datis, nempe 0.0088285. Hic deinde divisus per 30 $\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0.000579, qui sumendus est decies pro diebus 10, fitque 0.0005790. Addatur his Log-mus 3.2041200 pro forte scutorum 1600, habetur ex horum summa Log-mus 3.3406633, qui in Tab. quæsitus dat numerum, seu scuta 2191 pupillo ipsi ab Hortensio debita.

Pro annis	6	Log.	0.1271358
Pro mens.	5	Log.	0.0088285
Pro diebus	10	Log.	0.0005790
Pro sorte	1600	Log.	3.2041200

Summa 3.3406633

4. Fin-

4. Fingamus eundem Hortensium debere alteri summam illam scut. 1600 solvendam post annos 6, menses 5, diēs 10: quam illi parata pecunia offert, siquidem scuta 5 ex singulis 100 a creditore sibi relaxentur. Quæritur quantum debeat solvere.

Hæc quæstio eadem ratione solvitur, dummodo ex Log-mo 3. 2041200 fortis 1600 auferatur summa Log-morum pro annis 6, mensibus 5, & diebus 10, ut supra inventa, nempe 0. 1365433. Nam residuus Log-mus 3. 0675767 in Tab. quæsitus dat summam solvendam scut. 1168.

Pro annis 6 Log. 0. 1271358

Pro mens. 5 Log. 0. 0078285

Pro diebus 10 Log. 0. 0005790

Summa 0. 1365433

Scut. 1600 Log. — 3. 2041200

Resid. 3. 0675767, dat 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, restituntur post annos sex una cum annuis usuraru m usuris, quæ simul cum sorte conficiunt summam scut. 1340; quæritur singulorum annorum usura cum ipsa sorte, & quanta fuerit ex singulis 100 usura.

Inveniuntur inter duos numeros 1000 & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) per *Probl. 2.* Dabuñt illi summas quæsitæ, hoc est sortem una cum uniuscunque anni usura. En totius operationis typus.

Scuta 1340 Log. 3. 1271048

Scuta 1000 Log. — 3. 0000000

Resid. 0. 1271048

Divide per 6, dat Q. 0. 0211841

Log-mus sextæ partis, quem voco Q. addatur primum Log-mo fortis 1000, summa dabit Log-mum pro forte, & usura primi anni A. Adde deinde huic summæ Log-mum ipsum Q, nova summa dabit Log-mum pro forte & usura secundi anni B; & sic deinceps addendo præcedenti summæ Log-mum eundem Q, aggregatum dat Log-mum pro forte & lucro annorum C, D, E &c.

$$\begin{array}{r} \text{Log.} \quad 3. 0000000 \\ \text{Q. Log.} + 0. 0211841 \\ \hline \text{Log.} \quad 3. 0211841 \text{ dat sc. } 1050 \end{array} \quad A$$

$$\begin{array}{r} \text{Q. Log.} + 0. 0211841 \\ \hline \text{Log.} \quad 3. 0423682 \text{ dat sc. } 1102 \end{array} \quad B$$

$$\begin{array}{r} \text{Q. Log.} + 0. 0211841 \\ \hline \text{Log.} \quad 3. 0635523 \text{ dat sc. } 1157 \end{array} \quad C$$

$$\begin{array}{r} \text{Q. Log.} + 0. 0211841 \\ \hline \text{Log.} \quad 3. 0847364 \text{ dat sc. } 1215 \end{array} \quad D$$

Q. Log.

$$Q. \text{ Log. } + 0. 0211841$$

$$\text{Log. } 3. 1059205 \text{ dat sc. } 1276$$

E

$$Q. \text{ Log. } + 0. 0211841$$

$$\text{Log. } 3. 1271046 \text{ dat sc. } 1340$$

F

Inventa autem usura primæ anni A una cum forte, scutis scilicet 1050, statim innotescit quanta fuerit ex singulis 100 usura. Nam si 1000 fiunt 1050, scuta 100 per regulam proportionum fiunt 105, adeoque usura fuit scut. 5 ex singulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur ex *Coroll. Prop. 13. Cap. 6. Arithm.*, & ex *præc. Probl.*

P R O B L. IV.

Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.

1. **E**Xperientia constat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli semirecti, seu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo semirecto æqualiter distantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales esse. Sit igitur experimento cognitum ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, explosum fuisse globum ad distantiam passuum 4000; quæritur, quanta futura sit distantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi servata) ad datam elevationem gr. 30.

Aa 2

Cum

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut sinus totus ad finum anguli 30 duplicati, seu 60, ita passus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Scol. 1. & 2. Prop. 14.*

$$\begin{array}{r} \text{Gr. } 60, \text{ Log. } 9.9375306 \\ \text{Pass. } 4000, \text{ Log. } 3.6020600 \\ \hline \end{array}$$

Summa 13. 5395906

Fit (Cor. 2. Prop. 14.) 3. 4395906, *dat pass. 3464*

2. Quod si e converso data scopi distantia, ex.gr. passuum 1500, ad quem ictus est dirigendus, quaeratur in ipsomet tormento elevationis angulus; fiat ut distantia maximi ictus, ex.gr. passuum 4000, ad elevationem gr. 45, ita distantia data passuum 1500 ad angulum elevationis quaeratur. Itaque duplicato angulo 45; ut in primo casu factum est, erit per *Scol. 1. & 2. Prop. 14.*

$$\begin{array}{r} \text{Pass. } 4000 \text{ Compl. Arithm. } 6.3979400 \\ \text{Pass. } 1500 \text{ Log. } 3.1760913 \\ \hline \end{array}$$

Summa 9. 5740313, *dat gr. 22 1/2.*

Schol. Quam singulari facilitate per Log-mos confici possint Tabulae, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari possint, quaeque ad utranque hujus problematis partem maxime inserviant, facile est intelligere.

m. 2

2 3 A

PROBL.

P R O B L. V.

*Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum
invenire.*

STatue in plano aliquo horizontali stylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipsum planum, qui divisus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Caledaria innotescit) metire umbram, quam projicit stylus; sitque Romæ ex gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum stylus continet 100. Erit per *Probl. 5. Tacquet. Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad styli longitudinem 100, ita longitudo ipsius umbræ, prout est Sinus totus, ad longitudinem styli, prout est Tangens anguli altitudinis Solis, seu Æquatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 19', nempe per *Schol. 1. & 2. Prop. 14.*

Long. 89. Compl. Arith. 8. 0506100

Long. 100 Long. 2. 0000000

10. 0506100, dat gr. 48. 19'

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 41', est altitudo Poli Urbis Romæ quaesita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inventa est gr. 41. 54', seu gr. 42 proxime. Proinde Æquatoris altitudo Romæ est gr. 48.

Schol.

Schol.I. Ceterum plures sunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per stellas, elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam sit maxime necessarium, & Astronomiæ universæ sit veluti basis & fundamentum.

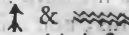
Schol.II. Ut habeantur altitudines meridianæ signorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Æquatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Astronomicis passim occurrunt. Sic declinatio Solis in principio signorum Borealium ♈ & ♉ est gr. 11. 30. Hos adde ad Æquatoris altitudinem, quæ Romæ, ut diximus, est gr. 48, erit altitudo meridianæ Solis ♈ & ♉ initium ingressi gr. 59. 30. Quod si altitudinem meridianam Solis quæras pro initio signorum Australium ♋ & ♌, subtrahere ab Æquatoris altitudine, nempe ex gr. 48, eorum declinationem, quæ est gr. 20. 12, residuum dat gr. 27. 48 pro altitudine meridianæ quæsita.

P R O B L. VI.

In linea meridianæ Zodiaci signa describere.

DUcta in aliquo plano horizontali linea meridianæ, prout in elementis Sphæricis docetur, quam singulis diebus Sol per foramen exiguum transiens, in ipso meridiei momento tangat, describenda sint in illa Zodiaci signa, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoscendum tempus, quo Sol ea signa ingreditur, atque percurrit. Meti-

Metire altitudinem gnomonis, seu muri usque ad foramen illud, per quod Sol transit, ut nota fiat in pedibus, vel uncias, aut alia qualibet mensura. Tum inventis altitudinibus meridianis signorum Cœlestium, *per Schol. 2. Probl. 5.*, habebis eorum complementa, & complementorum ipsorum Mesolog-mos, seu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout est Sinus totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis signi, seu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel uncias nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus distabit ab initio lineæ meridianæ signi cœlestis locus in ipsamet linea meridiana designandus.

Sit exemplum. Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani jussu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Francisco Blanchino ejusdem Pontificis Prælato domestico constructus anno 1702, in quo quidem altitudo muri usque ad foramen, per quod transit radius Solaris, est unciarum 750 pedis regii Parisiensis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inserta est. Fingamus huic Zodiaci signa  (nam bina simul describuntur) esse a nobis inscribenda, seu quærendum esse punctum, quod Sol tangit, ubi signa illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem signorum est gr. 27. 48', *per Schol. Probl. 5.*, eorumque complementum gr. 62. 12'. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10. 2779915. Fiat ergo ut altitudo muri, prout est Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10. 2779915,

ita eadem muri altitudo, prout est unciarum 750
Log-mus, ad Log-mum pro unciis quæsitis. Erit
per Schol. 1. & 2. Prop. 14.

Complem. Tang. 10. 2779915

Unc. 750 Log. 2.8750613

Summa 13. 1530528

Fit (Cor. 2. Prop. 14.) 3. 1530528, dat unc. 1422,

Distabunt igitur signa \uparrow & \approx a principio li-
neæ meridianæ unciis 1422 pedis ejusdem Parisien-
sis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci signo-
rum in ipsa linea meridia loci designabitur.

A P P E N D I X

Praxewn Chronologicarum.

CUM tempus ex Aristotele *lib. 4. Physic.*
Cap. 11. sit numerus, seu mensura motus
secundum prius & posterius, non erit abs
re hic praxes aliquot Cronologicas subijcere, quæ
à numeratione temporis, seu motuum Cœlestium
Solis, & Lunæ maxime pendent, quas quidem
non tam præclarum est scire, præsertim Eccle-
siasticis viris, quam turpe nescire, id quod de
Latina lingua inquit Cicero. Prænotandi igitur
sunt primo termini aliquot Chronologici.

DE.

DEFINITIONES.

1. **C**yclus, seu *Periodus* est certus annorum numerus in orbem rediens. Tres præsertim sunt Cycli, Solaris, Lunar, Indictionis.
2. *Cyclus Solaris* est intervallum annorum 28; quo evolutò, literæ Dominicales *A.B.C.D.E.F.G.* Calendario appositæ redeunt eodem ordine, quo antea, & ad easdem ferias.
3. *Cyclus Lunar*, sive *aureus Numerus* est series annorum 19, qua completa, novilunia ad eundem diem regrediuntur. Dicitur *Numerus aureus*, quia Athenis in foro aureis literis quotannis inscribebantur ad novilunia indicanda.
4. *Indictio* est series annorum 15 in orbem rediens, post Constantini tempora, sive ab anno Christi 312, ut fama est, in usum recepta apud Græcos & Romanos; hoc discrimine, quod indictio Romana a Kal. Januariis, Græca vero a Kal. Septem. initium ducit.
5. *Annus Julianus* a Julio Cæsare Dictatore dictus, qui Numæ regis annum emendavit, est dierum 365 hor. 6, quæ quidem horæ 6 singulis quatuor annis horas 24, seu diem solidum constituunt. Itaque annus Julianus, qui constat diebus 365, dicitur *communis*; qui vero diebus 366 singulis quadrienniis, *Bissextilis* dicitur, quod scilicet dies sextus ante Kal. Martias bis numeretur, seu intercaletur, unde dies, & annus *intercalares* vocantur.
6. *Annus Gregorianus* est annus Julianus a Gregorio XIII. Pontifice anno 1582. correctus,

3. Pupilli alicujus bona, quæ æstimata fuerunt scutorum 1600, accepit Hortensius pacto augendi quotannis fortem ex fructibus ad rationem scutorum 5 in singula centena. Retinuit illa annis 6, mensibus 5, & diebus 10, quæritur, quantum pupillo debeat.

Cum scuta 100 fiant 105, erit proportio fortis ad fortem una cum fœnore $\frac{105}{100}$, seu (dividendo per 5) $\frac{21}{20}$. Auferatur denominatoris 20 Log-mus 1.3010300 ex numeratoris 21 Log-mo 1.3222193, residuum 0.0211893 erit ratio fortis ad fortem una cum fœnore unius anni, qui Log-mus propter annos 6 sumi debet sexies, seu duci in 6, fitque 0.1271358.

Ut habeantur menses, ac dies, dividatur Log-mus ille residuus 0.0211893 per 12, quoruscumque 0.0017657 dat Log-mum, quinquies sumendum pro 5 mensibus datis, nempe 0.0088285. Hic deinde divisus per 30 $\frac{1}{2}$ dat Log-mum 0.000579, qui sumendus est decies pro diebus 10, fitque 0.0005790. Addatur his Log-mus 3.2041200 pro sorte scutorum 1600, habetur ex horum summa Log-mus 3.3406633, qui in Tab. quæsitus dat numerum, seu scuta 2191 pupillo ipsi ab Hortensio debita.

Pro annis 6 Log. 0.1271358

Pro mens. 5 Log. 0.0088285

Pro diebus 10 Log. 0.0005790

Pro sorte 1600 Log. 3.2041200

Summa 3.3406633

4. Fin-

4. Fingamus eundem Hortensium debere alteri summam illam scut. 1600 solvendam post annos 6, menses 5, dies 10: quam illi parata pecunia offert, siquidem scuta 5 ex singulis 100 a creditore sibi relaxentur. Quæritur quantum debeat solvere.

Hæc quæstio eadem ratione solvitur, dummodo ex Log-mo 3. 2041200 fortis 1600 auferatur summa Log-morum pro annis 6, mensibus 5, & diebus 10, ut supra inventa, nempe 0. 1365433. Nam residuus Log-mus 3. 0675767 in Tab. quæsitus dat summam solvendam scut. 1168.

Pro annis 6 Log. 0. 1271358

Pro mens. 5 Log. 0. 0078285

Pro diebus 10 Log. 0. 0005790

Summa 0. 1365433

Scut. 1600 Log. — 3. 2041200

Resid. 3. 0675767, dat 1168.

5. Scuta 1000, quæ fœnori data fuerant, restituntur post annos sex una cum annuis usuraru m usuris, quæ simul cum sorte conficiunt summam scut. 1340; quæritur singulorum annorum usura cum ipsa sorte, & quanta fuerit ex singulis 100 usura.

Inveniuntur inter duos numeros 1000 & 1340 tot medii proportionales minus uno, quot fuerunt anni (ut hic quinque) per Probl. 2. Dabunt illi summas quæsitæ, hoc est sortem una cum uniuscunque anni usura. En totius operationis typus.

Scuta 1340 Log. 3. 1271048

Scuta 1000 Log. — 3. 0000000

Resid. 0. 1271048

Divide per 6, dat Q. 0. 0211841

Log-mus sextæ partis, quem voco Q. addatur primum Log-mo fortis 1000, summa dabit Log-mum pro sorte, & usura primi anni *A*. Adde deinde huic summæ Log-mum ipsum Q, nova summa dabit Log-mum pro sorte & usura secundi anni *B*; & sic deinceps addendo præcedenti summæ Log-mum eundem Q, aggregatum dat Log-mum pro sorte & lucro annorum *C, D, E* &c.

Log. 3. 0000000

Q. Log. + 0. 0211841

Log. 3. 0211841 dat sc. 1050 *A*

Q. Log. + 0. 0211841

Log. 3. 0423682 dat sc. 1102 *B*

Q. Log. + 0. 0211841

Log. 3. 0635523 dat sc. 1157 *C*

Q. Log. + 0. 0211841

Log. 3. 0847364 dat sc. 1215 *D*

Q. Log.

$$\begin{array}{r} \text{Q. Log. } + \text{ o. } 0211841 \\ \hline \end{array} \quad E$$

$$\text{Log. } 3. 1059205 \text{ dat sc. } 1276$$

$$\begin{array}{r} \text{Q. Log. } + \text{ o. } 0211841 \\ \hline \end{array} \quad F$$

$$\text{Log. } 3. 1271046 \text{ dat sc. } 1340$$

Inventa autem usura primæ anni A una cum forte, scutis scilicet 1050, statim innotescit quanta fuerit ex singulis 100 usura. Nam si 1000 fiunt 1050, scuta 100 per regulam proportionum fiunt 105, adeoque usura fuit scut. 5 ex singulis 100, ut patet.

Ratio primæ partis deducitur ex *Coroll. Prop. 13. Cap. 6. Arithm.*, & ex *præc. Probl.*

P R O B L. IV.

Data tormenti bellici elevatione, distantiam ictus invenire, & e converso.

1. **E**Xperientia constat, maximum tormenti bellici ictum fieri ad elevationem anguli semirecti, seu gr. 45, reliquos vero ictus ab angulo semirecto æqualiter distantes, ut 30 & 60, 40 & 50 &c. æquales esse. Sit igitur experimento cognitum ab eo tormento, dum ad gradus 45 elevaretur, explosum fuisse globum ad distantiam passuum 4000; quæritur, quanta futura sit distantia (eadem pyrii pulveris quantitate ac vi servata) ad datam elevationem gr. 30.

Aa 2

Cum

Cum angulus 45 duplicatus fiat 90, erit ut sinus totus ad finum anguli 30 duplicati, seu 60, ita passus 4000 ad quartum proportionalem; adeoque per *Scol. 1. & 2. Prop. 14.*

$$\begin{array}{r} \text{Gr. } 60, \text{ Log. } 9.9375306 \\ \text{Pass. } 4000, \text{ Log. } 3.6020600 \end{array}$$

$$\text{Summa } 13.5395906$$

Fit (Cor. 2. Prop. 14.) 3.4395906, dat pass. 3464

2. Quod si e converso data scopi distantia, ex.gr. passuum 1500, ad quem ictus est dirigendus, quaeratur in ipsomet tormento elevationis angulus; fiat ut distantia maximi ictus, ex.gr. passuum 4000, ad elevationem gr. 45, ita distantia data passuum 1500 ad angulum elevationis quaeritur. Itaque duplicato angulo 45; ut in primo casu factum est, erit per *Scol. 1. & 2. Prop. 14.*

$$\begin{array}{r} \text{Pass. } 4000 \text{ Compl. Arithm. } 6.3979400 \\ \text{Pass. } 1500 \text{ Log. } 3.1760913 \end{array}$$

$$\text{Summa } 9.5740313, \text{ dat gr. } 22.$$

Schol. Quam singulari facilitate per Log-mos confici possint Tabulae, quibus omnes tormenti bellici ictus ex uno dato determinari possint, quaeque ad utranque hujus problematis partem maxime inserviant, facile est intelligere.

PROBL.

P R O B L. V.

*Altitudinem Poli tempore æquinoctiorum
invenire.*

STatue in plano aliquo horizontali stylum, qui *Gnomon* dicitur, perpendicularem ad ipsum planum, qui divisus intelligatur in partes æquales 100. Tum in meridie ejus diei, in quo Sol Arietis, vel Libræ initium ingreditur (quod facile per Caledaria innotescit) metire umbram, quam projicit stylus; sitque Romæ ex. gr. inventa umbræ longitudo partium 89, quarum stylus continet 100. Erit per *Probl. 5. Tacquet. Trigonomet.*, ut longitudo umbræ 89 ad styli longitudinem 100, ita longitudo ipsius umbræ, prout est Sinus totus, ad longitudinem styli, prout est Tangens anguli altitudinis Solis, seu Æquatoris, quæ dat in Tab. gr. 48. 19', nempe per *Schol. 1. O 2. Prop. 14.*

Long. 89. Compl. Arith. 8. 0506100

Long. 100 Long. 2. 0000000

10. 0506100, dat gr. 48. 19'

Horum complementum ad gr. 90, nimirum gr. 41. 41', est altitudo Poli Urbis Romæ quaesita, ut ex doctrinæ Sphæricæ elementis patet. Quæ tamen per accuratiorem recentiorum calculum deinde inventa est gr. 41. 54', seu gr. 42 proxime. Proinde Æquatoris altitudo Romæ est gr. 48.

Schol.

Schol. I. Ceterum plures sunt modi, quibus nunc recentiores Mathematici quolibet die, vel etiam nocte per stellas, elevationem Poli inveniunt, cum hoc problema ad Geographiæ doctrinam sit maxime necessarium, & Astronomiæ universæ sit veluti basis & fundamentum.

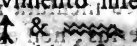
Schol. II. Ut habeantur altitudines meridianæ signorum Zodiaci Borealium, adduntur ad altitudinem Æquatoris tuæ regionis declinationes Solis, quæ in Tab. Astronomicis passim occurrunt. Sic declinatio Solis in principio signorum Borealium ♈ & ♉ est gr. 11. 30. Hos adde ad Æquatoris altitudinem, quæ Romæ, ut diximus, est gr. 48, erit altitudo meridianæ Solis ♈ & ♉ initium ingressi gr. 59. 30. Quod si altitudinem meridianam Solis quæras pro initio signorum Australium ♋ & ♌, subtrahere ab Æquatoris altitudine, nempe ex gr. 48, eorum declinationem, quæ est gr. 20. 12, residuum dat gr. 27. 48 pro altitudine meridianæ quæsita.

P R O B L E M A VI.

In linea meridianæ Zodiaci signa describere.

DUcta in aliquo plano horizontali linea meridianæ, prout in elementis Sphæricis docetur, quam singulis diebus Sol per foramen exiguum transiens, in ipso meridiei momento tangat, describenda sint in illa Zodiaci signa, nempe ♈, ♉, ♊ &c. Aries, Taurus, Gemini &c. ad dignoscendum tempus, quo Sol ea signa ingreditur, atque percurrit. Meti-

Metire altitudinem gnomonis, seu muri usque ad foramen illud, per quod Sol transit, ut nota fiat in pedibus, vel unciis, aut alia qualibet mensura. Tum inventis altitudinibus meridianis signorum Cœlestium, *per Schol. 2. Probl. 5.*, habebis earum complementa, & complementorum ipsorum Mesolog-mos, seu Tangentes. Fiat igitur ut muri altitudo, prout est Sinus totus, ad Tangentem complementi altitudinis meridianæ talis signi, seu paralleli, ita eadem altitudo in pedibus, vel unciis nota ad quartum proportionale, quod dabit in Tabulis pedes, vel uncias, quibus distabit ab initio lineæ meridianæ signi cœlestis locus in ipsamet linea meridiana designandus.

Sit exemplum. Gnomon celeberrimus Romæ in Thermis Diocletiani jussu Clem. XI. Pont. Max. a Cl. Viro Francisco Blanchino ejusdem Pontificis Prælato domestico constructus anno 1702, in quo quidem altitudo muri usque ad foramen, per quod transit radius Solaris, est unciarum 750 pedis regii Parisiensis, linea vero meridiana in ænea lamina pavimento inserta est. Fingamus huic Zodiaci signa  (nam bina simul describuntur) esse a nobis inscribenda, seu querendum esse punctum, quod Sol tangit, ubi signa illa Zodiaci ingreditur. Altitudo meridiana eorundem signorum est gr. 27. 48, *per Schol. Probl. 5.*, eorumque complementum gr. 62. 12. Hujus autem complementi Tangens ex Tab. 10. 2779915. Fiat ergo ut altitudo muri, prout est Sinus totus, ad altitudinis meridianæ complementi Tangentem 10. 2779915,

ita eadem muri altitudo, prout est unciarum 750
Log-mus, ad Log-mum pro unciis quæsitis. Erit
per Schol. 1. & 2. Prop. 14.

Complem. Tang. 10. 2779915

Unc. 750 Log. 2.8750613

Summa 13. 1530528

Fit (Cor. 2. Prop. 14.) 3. 1530528, dat unc. 1422,

Distabunt igitur signa \uparrow & \approx a principio lineæ meridianaë unciis 1422 pedis ejusdem Parisien-sis. Eademque ratione ceterorum Zodiaci signorum in ipsa linea meridiana locus designabitur.

A P P E N D I X

Praxewn Chronologicarum.

CUM tempus ex Aristotele *lib. 4. Physic.*
Cap. 11. sit numerus, seu mensura motus
secundum prius & posterius, non erit abs-
re hic praxes aliquot Gronologicas subjicere, quæ
a numeratione temporis, seu motuum Cœlestium
Solis, & Lunæ maxime pendent, quas quidem
non tam præclarum est scire, præsertim Eccle-
siasticis viris, quam turpe nescire, id quod de
Latina lingua inquit Cicero. Prænotandi igitur
sunt primo termini aliquot Chronologici.

DE-

DEFINITIONES.

1. **C**ycclus, seu *Periodus* est certus annorum numerus in orbem rediens. Tres præfertim sunt Cyccli, Solaris, Lunaris, Indictionis.

2. *Cycclus Solaris* est intervallum annorum 28; quo evolutò, literæ Dominicales *A.B.C.D.E.F.G.* Calendario appositæ redeunt eodem ordine, quo antea, & ad easdem ferias.

3. *Cycclus Lunaris*, sive *aureus Numerus* est series annorum 19, qua completa, novilunia ad eundem diem regrediuntur. Dicitur *Numerus aureus*, quia Athenis in foro aureis literis quotannis inscribebantur ad novilunia indicanda.

4. *Indictio* est series annorum 15 in orbem rediens, post Constantini tempora, sive ab anno Christi 312, ut fama est, in usum recepta apud Græcos & Romanos; hoc discrimine, quod indictio Romana a Kal. Januariis, Græca vero a Kal. Septem. initium ducit.

5. *Annus Julianus* a Julio Cæsare Dictatore dictus, qui Numæ regis annum emendavit, est diurnum 365 hor. 6, quæ quidem horæ 6 singulis quatuor annis horas 24, seu diem solidum constituunt. Itaque annus Julianus, qui constat diebus 365, dicitur *communis*; qui vero diebus 366 singulis quadrienniis, *Bissextilis* dicitur; quod scilicet dies sextus ante Kal. Martias bis numeretur, seu intercaletur, unde dies, & annus *intercalares* vocantur.

6. *Annus Gregorianus* est annus Julianus a Gregorio XIII. Pontifice anno 1582. correctus,

10 diebus subductis. Differt a Juliano in hoc, quod post annum Christi 1600. e singulis annis centesimis, qui omnes in Calendario Juliano bissextiles sunt, in Gregoriano tres primi, nempe 1700, 1800, & 1900 sunt communes, & solus quartus 2000 bissextiles erit.

7. *Epactæ* sunt dies undecim, qui addendi sunt ad annum lunarem, (qui constat diebus 354) ut adæquet annum solarem; qui est dierum 365, ut dictum est. Unde si hoc anno ex. gr. fuerit *Epacta* xi., sequenti anno erit xxi, sed tertio anno *Epacta* erit lli. Nam quoties *Epactæ* hujusmodi additæ excedunt numerum 30, detrahitur numerus 30, & residuus numerus est *Epacta* illius anni. Si per additionem fiant 30, *Epacta* illius anni erit*, seu nihil.

8. *Periodus Victoriana*, seu *Dionysiana* est series annorum 532 e Cyclo Solari 28, in Cyclum Lunarem 19 multiplicato contexta, qua peracta, iidem Cycli Solis & Lunæ iterum redeunt. Dicitur *Victoriana*, quod a Victore Aquitano anno Christi 457 instituta sit, vel *Dionysian* a Dionysio quodam *Exiguo*, qui ad Ecclesiam Romanam cum Alexandrina circa celebrationem Paschatis conciliandam, illam adhibuit.

9. *Periodus Juliana* est series annorum 3980, quæ ex Cyclorum Solis, Lunæ, & Indiætionis multiplicatione oritur; sive est productum ex multiplicatione Periodi Victorianæ per Cyclum Indiætionis, nempe annorum $532 \times 15 = 7980$; in quæ tres illi Cycli Solis, Lunæ, & Indiætionis, qui in præsentem hoc anno conveniunt, in alio iterum

non

non convenient nisi post annos 7980 expletos. Dicitur Juliana, quod Julianis annis constet. Est Periodus omnium præstantissima, quæ incœpit anno 710 ante Orbem conditum, & nondum est absoluta, a Josepho Scaligero excogitata.

10. *Epocha*, sive *Æra* est terminus, a quo anni numerantur. Sic *Æra Christiana*, qua nunc vulgo utimur, & vulgaris dicitur, numerat annos a Christi nativitate, seu potius ab ejus Circumcisione, hoc est a Kal. Januariis post orbem conditum annis 4004 juxta Cl. Ufferii calculum.

Schol. I. *Loquimur hic de anno tam Solari, quam Lunari civili, qui ex integris diebus constant, non autem de anno Solari, aut Lunari Astronomico, qui præter dies, horas quoque & minuta prima, secunda, tertia &c. computat, quæ non sunt hujus loci.*

Schol. II. *Literæ Dominicales ordine retrogrado procedunt, nempe G, F, E, D, C, B, A, ut si hoc anno litera dominicalis sit G, proximo anno erit F, tertio E &c. usque ad A, quam G iterum sequitur. Ratio est, quia cum annus Julianus communis constet diebus 365, hoc est hebdomadibus 52, & præterea die 1, si prima Januarii dies designetur littera A, etiam ultima Decembris eadem littera A designabitur. Sic igitur tam primus, quam ultimus illius anni dies Dominicus, subsequens annus inchoabitur feria II, dies autem Dominicus hujus anni incidet in diem Januarii septimum; proinde litera Dominicalis non erit B, sed G. Tertius anni inchoabitur feria III, adeoque dies Dominicus cadet in diem 6 Januarii, & litera Dominicalis erit F,*

Et sic de ceteris. Biffextilis autem annus duplici litera designatur eodemque ordine retrogrado, scilicet GF, FE, ED &c ita ut non F, sed G priorē locum obtineat, & ad diem usque 23 Februarii usurpetur, altera vero F deinceps usque ad finem totius intercalaris.

P R A X I S I.

An datus annus sit Biffextilis, vel quotus sit a Biffextili, invenire.

ANnum Christi datum divide per 4; si facta divisione, nihil remanet, ille annus Biffextilis est; si quis sit residuus, indicat, quotus annus sit a Biffextili. Sic annus, in quo hæc scribimus, 1748, quia divisus per 4, nihil remanet est Biffextilis. Annus vero proximi Jubilæi 1750 erit secundus a Biffextili. Nam eo diviso per 4 remanent 2.

Coroll. Divisionis hujus quotus, residuo neglecto, indicat, quot effluxerint anni a Christo nato Biffextiles. Sic anno 1748 numerantur Biffextiles 437. Sed unitate multari debent propter annum 1700, qui Biffextiles non fuit ex dictis *Defin.* 6. Erunt ergo numerandi $437 - 1 = 436$.

P R A X I S II.

Cyclum Solarem anni dati invenire.

ANno Christi proposito adde 9 (decimo namque hujus Cycli anno Christus natus est, adeoque jam novem erant expleti) Tum summa illa dividatur per 28, numerus ex divisione residuus erit Cyclus Solaris anni dati. Si ex divisione nihil remanet, erit Cyclus Solaris completus 28. Quotus autem indicat revolutiones hujus Cycli a Christi natiuitate peractas. Est hic annus 1748, cui adde 9, fit 1757, quem divide per 28 remanent 21 pro Cyclo Solari currentis anni. Quotus autem 62 indicat totidem effluxisse a Christo nato Cyclos Solares.

P R A X I S III.

Aureum numerum dati anni invenire.

DAto Christi anno adde unitatem (nam primo Æræ Christianæ anno aureus numerus fuit 2, adeoque unus jam erat absolutus) summam deinde divide per 19, residuum erit numerus aureus. Si nihil remanet, erit Cyclus completus, five annus 19. Quotus vero indicat, quot Cycli Lunares hactenus ab Æræ Christiana fuerint. Quæritur numerus aureus currentis anni 1748. Adde 1, fit 1749, quem divide per 19, remanet 1 pro aureo numero quæsito. Sunt autem a Christo nato

to

198 A P P E N D I X
 to Cycli Lunares 92, ut divisionis quotus ostendit.

P R A X I S I V .

*In quam hebdomadae feriam indicat primus
 anni dati dies, invenire.*

AD annum Christi præcedentem addatur Bif-
 sextiles elapsi, & a summa subtrahantur
 10. Tum numerus residuus dividatur per 7, id
 quod restat ex divisione dat feriam quæsitam.
 Si nihil remanet, erit feria septima, seu Sabba-
 tum. Scire cupio ex. gr. in quam feriam cadet
 primus dies anni 1800. En calculi typus

<i>Annus præced.</i>	1 7 9 9
<i>Bissex. per Cor.</i>	4 4 8
	2 2 4 7
<i>Correc. Greg.</i>	— 1 0
	7 2 2 3 7

319 $\frac{4}{7}$ resid. 4. indicat Fer. IV.

Eadem ratione invenitur feria, in quam dato
 anno, incidit propositus cujuscunque mensis dies.
 Quæritur ex. gr. in quam feriam incidit dies 17
 Augusti anno 1740, in quo electus fuit Pontifex
 Maximus Benedictus XIV. Ad annum præceden-
 tem addantur tum Bissextiles, qui *per Coroll.*
Prax. I. sunt 433, tum dies elapsi a Kal. Ja-
 nuariis usque ad diem 16 Augusti 1740, nempe

229, fit summa 2401, ex qua ob correctionem Gregorianam subductis 10, & residuo diviso per 7, remanent 4. Fuit ergo Feria IV.

<i>Ann. præced.</i>	1 7 3 9
<i>Bissextiles</i>	4 3 3
<i>Dies elapsi</i>	2 2 9
	2 4 0 1
<i>Corr. Gregor.</i>	— 1 0
	7
	2 3 9 1

341 $\frac{1}{7}$ Ref. 4. indicat Fer. IV.

P R A X I S V.

Literam Dominicalem dati anni invenire.

INveniatur Feria, qua annus propositus inchoatur per *prax. præc.*, eamque subtrahe ex 9, residuum dabit literam Dominicalem. Quæritur litera Dominicalis pro anno proximi Jubilæi 1750. Primus ejus dies per *Prax. præc.* incidet in Feriam v., subtrahe 5 ex 9, residuum 4 dat literam Dominicalem quarto loco positam, ordine litterarum directo numerandam, nempe *D.* Similiter scire volo literam Dominicalem anni 1755. Feria, in quam incidet primus ejus anni dies, erit per *Prax. præc.* Feria IV. Hanc subtrahe ex 9; residuum 5 dat literam Dominicalem *E* quinto loco positam.

Schol. *Aliæ sunt praxes pro litera Dominicali*

li invenienda, sed hæc a Blondello allata, est omnium brevissima, atque pulcherrima.

P R A X I S VI.

Dati anni Epactam invenire.

INVENIATUR aureus numerus anni propositi per *Prax.* 3., qui multiplicetur per 11, & ex producto auferantur dies 11 pro correctione Gregoriana, residuoque diviso per 30, numerus, qui remanet, erit Epacta quæsitæ. Ex. gr. quæritur Epacta anni 1750, cujus numerus aureus per *Prax.* 3. est 3. Hunc duc in 11 fit 33, ablatisque 11, residuum est 22, quod cum dividi nequeat per 30, residuum ipsum 22 dat Epactam quæsitam. Anni autem currentis 1748 Epacta est * seu zero. Nam aureus numerus est 1, adeoque ex hac praxi $1 \times 11 = 11 - 11 = 0$.

Schol. Epactæ dati anni numerari incipiunt a Kal. Martiis ejusdem anni. Proinde Epacta hujus 1748 = 0 durabit toto Februario anni 1749.

P R A X I S VII.

Mense ac die datis, ætatem Lunæ invenire.

ADde simul Epacta currentis anni, dies mensis elapfos, & numerum mensium a Martio inclusive, & ex summa subtracto, si fieri possit 30, residuum dabit ætatem Lunæ. Scire volo ex.

gr.

gr. ætatem Lunæ die 15 mensis Decembris hujus anni 1748. Cum ex dictis in *Prax. præc.* Epacta hoc anno sit = 0, addatur tantum dies 15, & numerus mensium a Martio inclusive, nempe 10, summa 25 (ex qua 30 subtrahi nequeunt) dat Lunæ ætatem quæsitam. Similiter scire cupio ætatem Lunæ die 4 Junii anni 1750. Epacta ejus anni per *Prax. 6.* est 22, cui adde dies 4 mensis Junii, & insuper 4 pro numero mensium a Martio inclusive, fit summa 30, ex qua si subtrahantur 30, nihil remanet; est ergo illo die Novilunium.

P R A X I S VIII.

Datis mense & anni Epacta Novilunii diem invenire.

Addatur ad Epactam anni dati numerus mensium a Martio inclusive, & summa subtrahatur ex 30; vel si summa illa superat 30, subtrahatur ex 60, residuum indicabit diem Novilunii. Quæritur ex. gr. in quotam Martii diem incidet Novilunium anno 1749. Ad Epactam ejus anni, quæ est 11 per *Prax. 6.* adde numerum mensium, qui est 1, & summa 12 subtrahatur ex 30, residuum 18 indicat Martii Novilunium die 18 futurum. Similiter quæritur Novilunium Decembris 1750. Ejus anni Epacta est 22 per *Prax. 6.*, & numerus mensium a Martio inclusive 10. Horum summam 32 subtrahe ex 60, residuum 28 dat diem Novilunii.

Schol. I. *Quánquam autem etas Luna per Epá-
 etas præfise definiri non possit, nunquam tamen
 folido die a vera Lunæ etate aberrat; proinde
 hæc methodus satis tuto in vulgarem usum rece-
 pta est.*

Schol. II. *Novilunium Paschale continetur intra
 diem 8 Martii & 5 Aprilis inclusive, intra quos
 terminos, qui Paschales audiunt, reperiri debet.*

P R A X I S IX.

*Dato Æræ Christianæ anno Indictionem
 IIIV invenire.*

A Nno Christi proposito adde 3, (primus
 enim Æræ Christianæ annus cœpit indi-
 ctione quarta) & aggregatum divide per 15,
 residuum ex divisione dat annum Indictionis.
 Si nihil remanet, erit Indictio 15. Sic ad hunc
 annum 1748 additis 3, fit summa 1751, quæ
 divisa per 15, dat residuum 11 pro Indictione
 quæsitâ. Quotus autem 116 indicat Indictiones
 jam a Christo nato completas.

P R A X I S X.

*Dato Æræ Christianæ anno, quotus in Periodo
 Juliana ille sit, invenire.*

E Sto datus Christi annus præfens 1748, quæ-
 ritur annus Periodi Julianæ, qui illi respon-
 det.

det. Anno dato 1748 adde 4713, summa 6461 dat annum quæsitum. Ratio est, quia primo Christi anno elapsi jam erant ejus periodi anni 4713.

Coroll. Si datus quilibet Periodi Julianæ annus dividatur per 28, per 19, & per 15, residuum ex prima divisione erit Cyclus Solis, ex secunda Cyclus Lunæ, & ex tertia Cyclus Indictionis. Sic diviso anno currenti Periodi Julianæ 6461 per 28, remanent 21 pro Cyclo Solari; per 19, remanet 1 pro Cyclo Lunari, sive aureo numero; per 15, remanent 11 pro Cyclo Indictionis.

P R A X I S XI.

*Dato anno ante Christum æram, quotus
in Periodo Juliana ille sit,
invenire.*

ESto datus annus ante Christum natum 4004, cui Usserius, Pagius, Lancelottus, aliique Chronologi illustres Mundi initium tribuunt, quæritur, quotus ille fuerit in Periodo Juliana. Auferatur datus annus 4004 ab annis Periodi Julianæ 4714, in quibus ex dictis in *Prax. præc.* primus Christi annus contigit, residuum dabit annum Periodi Julianæ, qui primo Mundi anno responderet, nimirum 710. Res per se pater.

Coroll. Hinc est, quod dato quolibet Periodi Julianæ anno, facile innotescit, an ille sit ante, vel post Christi nativitatem. Nam si datus annus major sit anno 4714, erit annus Periodi Julianæ post

Christum; si minor, erit ante Christum natum. Sic datis Periodi Julianæ annis 6461, ablatisque ab illis Periodi Julianæ annis 4713, ramanet præsens æræ vulgaris annus 1748. Ablatis autem annis Periodi Julianæ 710 ab annis 4714, habentur anni 4004. ante Christi nativitatem.

P R A X I S XII.

Datis Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ, in quem conveniunt.

DUc Cyclos datos $\left\{ \begin{array}{l} \text{Solis} \times 4845 \\ \text{Lunæ} \times 4200 \\ \text{Indict.} \times 6916 \end{array} \right.$

Et summa productorum divide per 7980, residuus erit annus Periodi Julianæ, qui datis Cyclis respondet. Sit exemplum. Primus Christi annus habuit Cyclum Solis 10, Lunæ 2, & Indictionis 4, quæritur annus Periodi Julianæ, cui conveniunt.

Cycli $\left\{ \begin{array}{l} \text{Solis} \quad 10 \times 4845 = 48450 \\ \text{Lunæ} \quad 2 \times 4200 = 8400 \\ \text{Indic.} \quad 4 \times 6916 = 27664 \end{array} \right.$

Summa 84514

Quæ divisa per 7980, residuum 4714 dat annum Periodi Julianæ pro primo Christi anno.

Simi-

Similiter hoc anno 1748 Cyclus Solis est 21, Lunæ I, Indictionis II, quæritur annus Periodi Julianæ.

$$\begin{array}{r} 21 \times 4845 = 191745 \\ \text{Duo} \left\{ \begin{array}{l} 11 \times 4200 = 4200 \\ 11 \times 6916 = 76076 \end{array} \right. \end{array}$$

Summa = 182021

Quæ divisa per 7980, residuum 6461 dat annum Periodi Julianæ, qui ex *Prax. 10.* respondet huic anno 1748.

Schol. *Qua ratione numeri illi determinati 4845, 4200, & 6916, per quos dati Cycli multiplicari debent, inveniuntur, non est hujus loci inquirere, cum methodo Analytica opus sit, quemadmodum ea usi sunt Franciscus a Schooten in Miscell., Praefatus T. 2. lib. 7. Element. Mathem., Joannes Keill lect. 29. de Cyclis, & alii.*

P R A X I S XIII.

Dato quolibet Periodi Julianæ anno, Olympiadum annos invenire.

Olympiadum Epochæ apud historicos, præsertim vero Græcos, celeberrima semper fuit, cum Græci annos non nisi per Olympiades, unde anni Olympiaci dicti sunt, numerare solerent. Nam quadriennio quolibet vertente, seu quinto quovis redeunte anno, in Olympia Elidis Urbe ludos

ludos in honorem Herculis circa solstitium æstivum maximo populorum concursu celebrabant. Ludi autem hujusmodi ab Iphito Elidis rege sive primum instituti, sive instantati sunt anno Per. Jul. 3938, & ante Christianam æram anno 776.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur annus Olympiacus, qui illi respondet. Si datus annus minor sit annis 3938, ex his auferatur; qui remanet, dabit annos, qui Olympiadum Epocham præcedunt. Sit annus Per. Jul. 3103, in quo juxta Petavium Moyses natus est, quæritur quot annis ejus nativitas Olympiadum præcesserit institutionem. Subductis 3103 ex 3938, residuum 835 dat annos quæsitos.

Quod si datus sit Per. Jul. annus 4714, in quo incepit Christiana æra, ut sæpe dictum est, major scilicet annis 3938, hos ab illo subducto residuum 776 dabit annos Olympiacos: qui si dividantur per 4, quotus dat Olympiades completas 194, & annum 1 Olympiadis ineuntis 195. Christus ergo natus est anno 1 ab Olympiade 194, sive anno primo Olympiadis 195.

Coroll. Dato æræ Christianæ anno, ex. gr. 1748, si illi addas annos 776, habebis annos Olympiacos, qui huic anno respondent, 2524; quibus divisus per 4, habentur Olympiades 631. Simili ratione, annus proximi Jubilæi 1750 erit secundus Olympiadis 632.

PRA-

P R A X I V S A X I V .

*Dato anno Olympiaca, quotus ille in Periodo
Juliana sit, invenire.*

Data sit Olympias 115: qua ineunte, Alexander M., ut historici referunt, diem obiit. Quæritur quoto Periodi Julianæ anno id contigerit. Multiplica Olympiades 113, elapas per 4, & producto 452, adde unitatem, ob annum primum Olympiadis 114 ineuntis, fit 453, cui ad jice 3937, aggregatum 4390 est annus Periodi Julianæ, in quo Alexander M. interiit.

Similiter Diodorus Siculus scribit, annum primum Olymp. 94 exeuntem, esse annum 780 post Trojæ excidium; scire volo, quotus ille esset Per. Jul. annus. Cum Trojanum excidium ex ejusdem Diodori Siculi, & Dionysii Halicarnassensis sententia acciderit anno Per. Jul. 3530, addantur anni post Trojæ casum elapsi 780 ad annos ipsos 3530, summa 4310 dabit annum Per. Jul., qui congruit cum anno 1 Olymp. 94.

Coroll. I. nota igitur, Trojæ excidium contigisse anno Per. Jul. 3530, ita ut primus annus Epochæ Trojanæ fuerit Per. Jul. annus 3531.

Coroll. II. Si ex anno Per. Jul. 4714, æræ Christianæ primo, auferas 4390, residuum 324 dat annos, quibus Alexandri M. mors præcessit Christi nativitatem. Sin ab eo auferas 3531, habebis annos Trojani excidii 1183 ante Christum natum. Quæ omnia ex Coroll. Præ. II. plana sunt.

PRA-

PRÆXIS XV.

Dato anno Periodi Julianæ, annum U. C. ei congruentem invenire.

EX Historia Romana satis patet, Romanos ab Urbe condita annorum initium eorumque seriem numerare consuevisse: unde orta est celebratissima U. C. Epochæ. Quæ quidem duplex est, *Varroniana* a M. Varrone dicta, quæ ædificationem Urbis in annum tertium Olympiadis vi. exeuntem refert, cui respondet annus Per. Jul. 3960, seu 3961 (cum Kal. Januariis sequentibus ea cœperit); Christianam vero Epocham antecedit annis 753, ita ut in annum U. C. 754 cadat primus Christi annus; & *Capitolina*, quæ a fastis Capitolinis collectis deducta fuit, & Urbem conditam in sequentem annum Per. Jul. 3962 rejicit. Sed Cor. Tacitus in suis Annalibus, Censorinus de Die Natali, aliique viri docti, quorum sententiam sequimur, Epocham U. C. Varronianam Capitolinæ præferunt.

Dato igitur Per. Jul. anno, quæritur quotus illi in Epochæ U. C. annus congruat. Si propositus annus minor erit 3961, facta subtractione, residuum dabit annos ante Urbem conditam. Sic ab anno 3961 subductis 710 (cui Per. Jul. anno Ufferius initium Mundi tribuit, ut dictum est) residuum 3251 dat Mundi annos ante U. C. Quod si major sit annis 3961, facta subtractione, residuum

fiduum dabit annos ab U. C. Sic subduſtis 3961
ex 4714 (primo æræ Chriſtianæ anno) reſiduum
753 dat annos U. C., qui præcedunt Chriſti na-
tivitytatem, quæ ex ſuperius dictis incidit in an-
num U. C. 754

P R A X I S XVI.

Dato U. C. anno, Periodi Julianæ, Olympi-
adum, & Æræ Chriſtianæ annos ei
congruentes invenire.

Refert C. Plinius *Nat. hiſtor. lib.8. c.6.* ele-
phantos in Italia primū viſos Pyrrhi re-
gis bello, anno Urbis quadringentefimo ſeptua-
geſimo ſecundo; hinc

1. Quæritur, quoto Periodi Julianæ anno id
contigerit. Ad U. C. annos ante dictos 472 ad-
dantur anni 3960, qui U. C. Epocham præcef-
ferunt ex dictis in *Prop. præc.*, aggregatum 4432
dat annum Per. Jul. quæſitum, ut patet.

2. Quæritur, in qua Olympiade, ſeu quoto
anno Olympiaco illud acciderit. Ab anno Per. Jul.
4432, ut ſupra, invento, auferantur anni 3938,
a quibus Olympiadum Epoca incoepit, reſiduum
494 dat annos Olympiacos, quibus diviſis per
4, habetur annus ſecundus Olympiadis 124 per
Prax. 13.

3. Demum quæritur, in quotum annum ante,
vel poſt Chriſtum natum Pyrrhi bellum, ſeu ele-
phantorum in Italiam adventus incidit. Ex an-

Ad Dd no

no Per. Jul. 4432 superius invento, facile intelligitur per *Coroll. Prax. II.* id ante æram Christianam contigisse. Itaque idem Per. Jul. annus 4432 auferatur ab anno primo Christianæ æræ 4714, residuus 282 dabit annos, qui Christianam æram precesserunt. Proinde elephantos Italia primum vidit anno Per. Jul. 4432, anno secundo ab Olympiade 123, post U. C. 472, ante æram Christianam annis 282.

Coroll. Dato U. C. anno, sive anno Per. Jul. qui ei congruit, facile intelligitur, quotus ille sit a Trojæ excidio annus. Subductis enim Trojæ Epochæ annis Per. Jul. 3530 (per *Cor. I. Prax. 14.*) ab annis Per. Jul., qui in eadem Per. Jul. respondent U. C. annis, residuus erit annus quæsitus. Sit exemplum. Dato anno U. C. 537, in quo a Romanis clades maxima ad Trasimenum lacum accepta est, Flaminii Consulis temeritate, quæritur, quotus ille fuerit ab excidio Trojæ, seu Trojæ Epochæ annus. Invenitur annus Per. Jul. congruens U. C. anno 537, qui per partem s. hujus *Prax.* erit 4497, ex hoc subducto Trojæ Epochæ annos 3530 (per *Cor. I. Prax. 14.*) residuum dat annos, qui intercesserunt, 967.

P R A X I S XVII.

Dato quolibet Per. Jul. anno, initium anni Ægyptiaci, seu neomeniam Thoth, invenire.

DE æra Nabonassari crebra fit mentio tum apud veteres Astronomos Ptolemæum, Hipparchum & alios, tum etiam apud celebriores Chronologos: proinde a nobis ea hic omitti omnino non potest. Fuit Nabonassarus Chaldæorum Rex, a cujus regni initio Babylonii novam Epocham instituerunt, quam Ægyptii ab illis acceperunt. Exordium ejus cadit in Per. Jul. annum 3967, die 26 Februarii ante Christum natum 749.

Quia vero Nabonassari æra non annis Julianis, sed Ægyptiacis constat, de his primo eorumque initio agendum est. Annus Ægyptiacus dies 365 continet, neglectis 6 illis horis, quibus annus Julianus, præter dies 365, componitur. Unde sicut, propter omissionem quadriennio quolibet vertente diem intercalarem, initium anni Ægyptiaci (quod neomenia Thoth dicitur) terro abeat, & per totum annum Julianum vagetur, unum perpetuo anticipans diem; ut si hoc anno ex. gr. neomenia Thoth incipiat Calendis Januariis, post quatuor annos incipiet die 31 Decembris, & iterum post alios quatuor annos, die 30 Decembris, & sic deinceps, donec demum anno 1461 ad Calendas Jan. rursus redeat, expletis scilicet annis Juliani 1460, qui annos Ægyptiacos 1461 præcisè continent.

In tota autem Periodo Juliana sunt quinque anni, qui spatio annorum 1460 invicem distant, in quibus tam primo Januarii die, quam ultimo Decembris neomenia Thoth contingit, nempe

1273, 2733, 4193, 5653, 7113

Dato igitur Per. Jul. anno, inveniri debeat, quotodie initium anni Ægyptiaci, seu Thoth incipiat. Hæc erit regula. Subducatur annus Per. Jul. ex uno ex superioribus numeris, qui sit proxime major dato, & residuum dividatur per 4. Si quotus minor fuerit quam 59, vel aliquid post divisionem supererit, addatur quoto unitas, dabitur summa diem neomenia Thoth a Calendis Januariis in anno Juliano numerandum. Si a divisione nihil restat, & quotus est major 59, ipse dabit diem, in quem incidet neomenia Thoth. Sit exemplum. Esto datus annus Per. Jul. 4714, in quo Christi dies natalis illuxit, quæritur, in quoto illius anni die neomenia Thoth contigerit. Subductis annis 4714 a numero proxime majori 5653, remanent 939, quibus divisus per 4, quotus dat 234, & remanent 3. Adde 1 ad ipsum quotum. Cœpit igitur Thoth die 235 a Calendis Januariis numerandum, hoc est die 23 Augusti. Similiter scire volo in quotum anni 1748 diem incidat initium anni Ægyptiaci, seu Thoth. Annus Per. Jul., qui huic anno congruit, est 6461 per *PRAE. 111* hunc subtrahere ex 7113 proxime majori, & residuum 652 divide per 4, quotus dat 162 sine ullo residuo. Huic (ob Correct. Gregorianam) adde 11, fit aggregatum 174.

Hoc

Hoc igitur anno 1748 initium anni Ægyptiaci contigit die 23 Junii; diebus scilicet 174 a Cal. Januariis.

Demum datus fit Periodi Julianæ annus 3965, in quo Tobias senior natus esse dicitur, & queratur ejus anni neomenia Thoth. Subducto 3965 ex 4193, remanent 228, quem numerum si divides per 4, habebis 57, & nihil remanet. Quia vero hic numerus minor est quam 59, nempe quam dies ultimus Februarii, in quo additur bissextilis dies, ad 57 addenda est unitas, & habetur dies quinquagesimus octavus, in quem cadet neomenia Thoth, nempe dies 27 Februarii.

Schol. Ex secundo exemplo patet, post Christi annum 1582, neomenia Thoth diem in anno Juliano inventum addendos esse, ob Correct. Gregorianam, dies 10 usque ad annum 1700, & ab anno 1700 usque ad 1800 dies 11.

P R A X I S XVIII.

Dato quolibet Per. Jul. anno, quotus ille in era Nabonassarii sit, invenire.

Observentur quinque sequentes anni Per Jul. A, B, C, D, E; quorum primus initium dedit Epochæ Nabonassarii, reliqui veritimos Nabonassareos singuli inchoant, ut in *Prax. præc.* explicavimus, eodemque intervallo annorum 1460 invicem distant.

A

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
3967.	4193.	5653.	7113.	8573.

Dato igitur quovis Per. Jul. anno, videatur ad quodnam intervallum spectet, sive quonam numerorum *A*, *B*, *C*, &c. sit proxime minor. Tum additis unitatibus, quæ illi intervallo respondent, dematur ex aggregato primus terminus *A*, id quod remanet indicabit quotus sit annus in æra Nabonassari quaesitus. Estto annus Per. Jul. 4714, qui, ut sæpe diximus, fuit humanæ salutis exordium. Hic ad intervallum secundum pertinet, cum sit major *B*, minor *C*; adde igitur 2 ad 4714, & ex summa 4716 deme numerum 3967, residuum dat 749. Ergo Christus natus est Nabonassari anno 749.

Eadem ratione scire cupio, quotus Nabonassari annus sit ipse, qui labitur annus 1748. Cum hic *en Prax.* 11. sit annus Per. Jul. 6461, major autem sit termino *C*, minor vero *D*, spectat ad intervallum 3. Adde ergo illi tres unitates, & ex summa 6464 tolle terminum *A*, residuus numerus 2497 dat annum Nabonassareum, qui cum hoc anno æræ Christianæ 1748 congruit.

Ratio regulæ patet ex dictis. Nam quodlibet intervallum est annorum 1460. Anni autem Juliani 1460 continet annos Ægyptiacos 1461, & unumquodque intervallum annum unum auget; proinde Per. Jul. anni, qui ex annis Julianis constant, augeri debent tot unitatibus, quot sunt intervalla, ut inter ipsos & annos Ægyptiacos, seu Nabonassareos habeatur æquatio.

PRA-

P R A X I S XIX.

Nabonassari annos in Per. Jul. annos

Notentur sequentes numeri *A, B, C, D, E* eorumque intervalla 1, 2, 3, 4, & videatur ad quod ex illis pertineat Nabonassari annus propositus, ab eoque tot demantur unitates, quot illi intervallo conveniunt. Tum residuo addantur anni 3967, qui initio æræ Nabonassari tribuuntur, summa erit annus Per. Jul. quæsitus.

<i>A.</i>	<i>B.</i>	<i>C.</i>	<i>D.</i>	<i>E.</i>
	1	2	3	4
1.	227.	1688.	3149.	4610.

Sit exemplum. Ptolemæus lib. 5. pag. 125. refert, Lunam defecisse anno quinto Nabopollassari, qui est 127 a Nabonassaro; quæritur, quoto Per. Jul. anno id acciderit. Cum annorum numerus 127 ad intervallum 1 spectet, utpote major *A*, minor vero *B*, auferatur ab eo 1, & residuo 126 addatur 3967, summa 4093 est annus Per. Jul. quæsitus.

Similiter quæritur, quotus sit in Periodo Juliana annus Nabonassari 2497. Pater hunc numerum pertinere ad intervallum 3, cum sit proxime major *C*, minor vero *D*. Auferantur igitur ab eo tres unitates, & residuo 2494 addatur numerus 3967; summa 6461 est annus Per. Jul., qui congruit cum anno Nabonassareo dato 2497. Quod



